

Egzamin, 16.02.2019, godz. 10:00-13:40**Zadanie 1. (10 punktów)**

W każdym z zadań **1.1–1.5** podaj w postaci uproszczonej (np. liczby wymierne muszą być zapisane w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego) kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz **TAK** albo **NIE**, ewentualnie **T** albo **N**).

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty = \infty$.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie (i w postaci uproszczonej) oba kresy i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz **2 punkty**.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie (i w postaci uproszczonej) oba kresy i poprawnie określisz przynależność jednego z nich do zbioru, otrzymasz **1 punkt**.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy (ale co najmniej jeden w postaci rażąco nieuproszczonej) i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz **1 punkt**.

Za pozostałe zadania nie otrzymasz punktów.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ oznacza zbiór liczb naturalnych (całkowitych dodatnich).

$$\mathbf{1.1.} \quad A = \left\{ \frac{1}{n^2 - 60} : n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{Ocena}$$

$\inf A = \dots\dots\dots$ $\sup A = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru A Czy kres górny należy do zbioru A

$$\mathbf{1.2.} \quad B = \left\{ \frac{1}{n^2 - 70} : n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{Ocena}$$

$\inf B = \dots\dots\dots$ $\sup B = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru B Czy kres górny należy do zbioru B

$$\mathbf{1.3.} \quad C = \left\{ \sqrt{25n^2 + 24n} - 5n : n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{Ocena}$$

$\inf C = \dots\dots\dots$ $\sup C = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru C Czy kres górny należy do zbioru C

$$\mathbf{1.4.} \quad D = \left\{ \sqrt{25n^2 - 24n} - 5n : n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{Ocena}$$

$\inf D = \dots\dots\dots$ $\sup D = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru D Czy kres górny należy do zbioru D

$$\mathbf{1.5.} \quad E = \left\{ \sqrt{25n^2 + 24n} + \sqrt{25n^2 - 24n} - 10n : n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{Ocena}$$

$\inf E = \dots\dots\dots$ $\sup E = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru E Czy kres górny należy do zbioru E

Zadanie 2. (10 punktów)

W każdym z zadań **2.1–2.10** podaj granicę funkcji.

Za każdą poprawną odpowiedź otrzymasz **1 punkt**.

$$2.1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} \left((2 - \sqrt{3}) \cdot x \right) = \dots$$

$$2.2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} \left((2 - \sqrt{5}) \cdot x \right) = \dots$$

$$2.3. \lim_{x \rightarrow -\infty} 3^x = \dots$$

$$2.4. \lim_{x \rightarrow -\infty} 3^{3^x} = \dots$$

$$2.5. \lim_{x \rightarrow -\infty} 3^{3^{3^x}} = \dots$$

$$2.6. \lim_{x \rightarrow -\infty} 3^{3^{3^{3^x}}} = \dots$$

$$2.7. \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{3^{2^{3^x}}} = \dots$$

$$2.8. \lim_{x \rightarrow -\infty} 3^{2^{3^{2^{3^x}}}} = \dots$$

$$2.9. \lim_{x \rightarrow -\infty} 3^{4^{3^{4^x}}} = \dots$$

$$2.10. \lim_{x \rightarrow -\infty} 4^{3^{4^{3^{4^x}}}} = \dots$$

Zadanie 3. (10 punktów)

W każdym z zadań **3.1–3.10** dla podanej liczby a podaj taką liczbę b , że funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = a|x| + bx$ spełnia dla każdej liczby rzeczywistej x równość $f(f(x)) = x$, czyli jest odwrotna do samej siebie.

$$3.1. a = 4, \quad b = \dots$$

$$3.2. a = -4, \quad b = \dots$$

$$3.3. a = 5, \quad b = \dots$$

$$3.4. a = -5, \quad b = \dots$$

$$3.5. a = 6, \quad b = \dots$$

$$3.6. a = -6, \quad b = \dots$$

$$3.7. a = 7, \quad b = \dots$$

$$3.8. a = -7, \quad b = \dots$$

$$3.9. a = 8, \quad b = \dots$$

$$3.10. a = -8, \quad b = \dots$$

Zadanie 4. (10 punktów)

W każdym z zadań **4.1–4.3** podaj w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego wartości pochodnej funkcji w trzech podanych punktach.

Za każdą poprawną odpowiedź otrzymasz **1 punkt**. Za komplet poprawnych odpowiedzi otrzymasz **dziesiąty punkt**.

$$4.1. f_1(x) = \sqrt[3]{x} \quad f'_1(1) = \dots \quad f'_1(8) = \dots \quad f'_1(27) = \dots$$

$$4.2. f_2(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^2} \quad f'_2(1) = \dots \quad f'_2(2) = \dots \quad f'_2(3) = \dots$$

$$4.3. f_3(x) = \ln(x^2 + 1) + \operatorname{arctg} 2 \quad f'_3(1) = \dots \quad f'_3(2) = \dots \quad f'_3(3) = \dots$$

Zadanie 5. (10 punktów)

Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = \sqrt{16x^2 + 8x + 1} - x^2$$

na przedziale $[-3, 4]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Zadanie 6. (10 punktów)

Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A , że funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - \sqrt{1+x}}{\ln(1+x)} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A .

Zadanie 7. (10 punktów)

Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leq \sqrt[4]{n^8 + 80n^6} - n^2 \leq 10C.$$

Zadanie 8. (10 punktów)

Dowieść, że liczba $\log_{2700} 9000$ jest niewymierna.

Zadanie 9. (10 punktów)

Niech funkcja $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x) = e^{\sqrt[3]{x}}.$$

Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(6) + f(8) \quad \text{czy} \quad 2 \cdot f(7) ?$$

Zadanie 10. (10 punktów)

Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{n^3} \leq \frac{5}{4} - \frac{1}{2n(n+1)}.$$