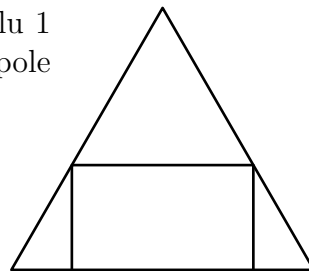


**KOŁOKWIUM nr 10, 14.01.2019, godz. 14:15–15:00**

**Zadanie 18. (10 punktów)** W trójkąt równoboczny o polu 1 chcemy wpisać prostokąt jak na rysunku obok. Jakie największe pole może mieć taki prostokąt?



*Rozwiązanie:*

Niech  $a$  będzie długością boku danego trójkąta równobocznego, a  $h$  jego wysokością. Jeżeli wpisany prostokąt ma wysokość  $x \in (0, h)$ , to jego podstawa ma długość  $a \cdot \left(1 - \frac{x}{h}\right)$ , co ustalamy na podstawie prostych rozważań geometrycznych.

Wówczas pole prostokąta jest równe

$$P(x) = x \cdot a \cdot \left(1 - \frac{x}{h}\right).$$

Zauważmy, że

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} P(x) = \lim_{x \rightarrow h^-} P(x) = 0,$$

a ponadto

$$P'(x) = a \cdot \left(1 - \frac{x}{h}\right) - \frac{x \cdot a}{h} = a - \frac{2 \cdot x \cdot a}{h} = a \cdot \left(1 - \frac{2x}{h}\right).$$

Wobec tego  $P'(x) = 0$  dla  $x = h/2$ , co prowadzi do maksymalnej wartości pola prostokąta równej

$$P(h/2) = \frac{h}{2} \cdot a \cdot \left(1 - \frac{h/2}{h}\right) = \frac{h}{2} \cdot a \cdot \frac{1}{2} = \frac{ah}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

W powyższych rachunkach skorzystaliśmy z podanego w treści zadania założenia, że trójkąt równoboczny ma pole  $1 = ah/2$ .

**Odpowiedź:** Największe możliwe pole prostokąta wynosi  $1/2$ .

**Zadanie 19. (10 punktów)**

Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą  $A$ , że funkcja  $f$  określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+2x} - 1 - \ln(1+x)}{x^3} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć  $f'(0)$  dla tej wartości parametru  $A$ .

*Rozwiązanie:*

Korzystając z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\sqrt{1+2h} - 1 - \ln(1+h)}{h^3} - A}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2h} - 1 - \ln(1+h) - Ah^3}{h^4}.$$

Przy  $h \rightarrow 0$  w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone  $\frac{0}{0}$ , możemy więc zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+2h)^{-1/2} - \frac{1}{1+h} - 3Ah^2}{4h^3}.$$

Przy  $h \rightarrow 0$  otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone  $\frac{0}{0}$ , możemy więc po raz drugi zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(1+2h)^{-3/2} + \frac{1}{(1+h)^2} - 6Ah}{12h^2}.$$

Przy  $h \rightarrow 0$  otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone  $\frac{0}{0}$ , możemy więc po raz trzeci zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3 \cdot (1+2h)^{-5/2} - \frac{2}{(1+h)^3} - 6A}{24h}.$$

Przy  $h \rightarrow 0$  otrzymujemy iloraz  $\frac{1-6A}{0}$ , co ma postać nieoznaczoną  $\frac{0}{0}$  dla  $A = 1/6$ . Wówczas możemy po raz czwarty zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-15 \cdot (1+2h)^{-7/2} + \frac{6}{(1+h)^4}}{24} = \frac{-15+6}{24} = \frac{-9}{24} = -\frac{3}{8}.$$

**Odpowiedź:** Funkcja  $f$  jest różniczkowalna dla  $A = 1/6$  i wówczas  $f'(0) = -3/8$ .