

KOŁOKWIUM nr 11, 21.01.2019, godz. 14:15–15:00**Zadanie 20. (10 punktów)**

Wyprowadzić wzór na pochodną rzędu 2019 funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określonej wzorem

$$f(x) = e^x \cdot \sin x.$$

Otrzymany wzór powinien mieć prostą postać, bez znaku " Σ ", z co najwyżej dwoma znakami "+" i co najwyżej dwoma znakami "-".

Rozwiązanie:

Obliczając kolejne pochodne funkcji f otrzymujemy

$$f'(x) = e^x \cdot \sin x + e^x \cdot \cos x,$$

$$f''(x) = e^x \cdot \sin x + e^x \cdot \cos x + e^x \cdot \cos x - e^x \cdot \sin x = 2 \cdot e^x \cdot \cos x,$$

$$f'''(x) = 2 \cdot e^x \cdot \cos x - 2 \cdot e^x \cdot \sin x,$$

$$f^{(4)}(x) = 2 \cdot e^x \cdot \cos x - 2 \cdot e^x \cdot \sin x - 2 \cdot e^x \cdot \sin x - 2 \cdot e^x \cdot \cos x = -4 \cdot e^x \cdot \sin x = -4 \cdot f(x),$$

skąd wynika, że czterokrotne zróżniczkowanie funkcji f jest równoważne z pomnożeniem jej przez -4 .

Wobec tego

$$\begin{aligned} f^{(2019)}(x) &= \frac{d^3}{dx^3} f^{(2016)}(x) = \frac{d^3}{dx^3} f^{(4 \cdot 504)}(x) = \frac{d^3}{dx^3} (-4)^{504} f(x) = 2^{1008} \cdot f'''(x) = \\ &= 2^{1008} \cdot (2 \cdot e^x \cdot \cos x - 2 \cdot e^x \cdot \sin x) = 2^{1009} \cdot e^x \cdot (\cos x - \sin x). \end{aligned}$$

Zadanie 21. (10 punktów)

Niech

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

- a) (4 punkty) Dla której wartości parametru A istnieje $f'(0)$ i ile jest równa?
 b) (6 punktów) Dla tej samej wartości parametru A wyznaczyć $f''(0)$.

Rozwiązanie:

Korzystając z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{e^h - 1}{h} - A}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1 - A \cdot h}{h^2}.$$

Przy $h \rightarrow 0$ w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - A}{2h}.$$

Przy $h \rightarrow 0$ otrzymujemy iloraz $\frac{1-A}{0}$, co ma postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$ dla $A = 1$. Wówczas możemy po raz drugi zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h}{2} = \frac{1}{2}.$$

W celu obliczenia pochodnej drugiego rzędu w zerze musimy najpierw obliczyć pierwszą pochodną poza zerem:

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot x - e^x + 1}{x^2}.$$

Z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f''(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(h) - f'(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{e^h \cdot h - e^h + 1}{h^2} - 1/2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h \cdot h - e^h + 1 - \frac{h^2}{2}}{h^3}.$$

Przy $h \rightarrow 0$ w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f''(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h \cdot h + e^h - e^h - h}{3h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h \cdot h - h}{3h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{3h}.$$

Przy $h \rightarrow 0$ w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc ponownie zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f''(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h}{3} = \frac{1}{3}.$$

Odpowiedź: Funkcja f jest różniczkowalna dla $A = 1$ i wówczas $f'(0) = 1/2$ oraz $f''(0) = 1/3$.