

KOŁOKWIUM nr 1, 15.10.2018, godz. 14:15–15:00**Zadanie 1. (10 punktów)**

Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$2^{65} \cdot n \leq 2^n + 2^{71}.$$

Rozwiązanie:

Dowód nierówności podzielimy na dwa przypadki.

Przypadek pierwszy: $n \leq 64$.

Dla $n \leq 64$ zachodzą nierówności

$$2^{65} \cdot n \leq 2^{65} \cdot 64 = 2^{65} \cdot 2^6 = 2^{71} < 2^n + 2^{71},$$

skąd wynika prawdziwość nierówności danej w zadaniu.

Przypadek drugi: $n \geq 65$.

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n = 65$ porównujemy lewą i prawą stronę nierówności danej w treści zadania:

$$L = 2^{65} \cdot 65,$$

$$P = 2^{65} + 2^{71} = 2^{65} + 2^6 \cdot 2^{65} = 2^{65} + 64 \cdot 2^{65} = 65 \cdot 2^{65},$$

skąd $L = P$.

2° Niech $n \geq 65$ będzie taką liczbą naturalną, że

$$2^{65} \cdot n \leq 2^n + 2^{71}.$$

W celu przeprowadzenia zasadniczej części dowodu indukcyjnego chcemy wykazać, że z powyższej nierówności wynika nierówność

$$2^{65} \cdot (n+1) \leq 2^{n+1} + 2^{71}.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności i korzystając z założenia indukcyjnego oraz z nierówności $n \geq 65$ otrzymujemy

$$L = 2^{65} \cdot (n+1) = 2^{65} \cdot n + 2^{65} \leq 2^n + 2^{71} + 2^{65} \leq 2^n + 2^{71} + 2^n = 2^{n+1} + 2^{71} = P,$$

co kończy dowód indukcyjny.

Zadanie 2. (10 punktów)

Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$2^{2n} \cdot \binom{2n}{n} > \binom{4n}{2n}.$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n = 1$ mamy $L = 8$ oraz $P = 6$, skąd $L > P$.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$2^{2n} \cdot \binom{2n}{n} > \binom{4n}{2n}.$$

Wykażemy, że wówczas

$$2^{2n+2} \cdot \binom{2n+2}{n+1} > \binom{4n+4}{2n+2}. \quad (\clubsuit)$$

Wychodząc od lewej strony równości $(\clubsuit)$ i korzystając z założenia indukcyjnego otrzymujemy

$$\begin{aligned} L &= 2^{2n+2} \cdot \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} = 4 \cdot 2^{2n} \cdot \frac{(2n)! \cdot (2n+1) \cdot (2n+2)}{(n!)^2 \cdot (n+1)^2} = 2^{2n} \cdot \binom{2n}{n} \cdot \frac{8 \cdot (2n+1)}{n+1} > \\ &> \binom{4n}{2n} \cdot \frac{8 \cdot (2n+1)}{n+1} = \frac{(4n)!}{((2n)!)^2} \cdot \frac{8 \cdot (2n+1)}{n+1} \geqslant \\ &\geqslant \frac{(4n)! \cdot (4n+1) \cdot (4n+2) \cdot (4n+3) \cdot (4n+4)}{((2n)!)^2 \cdot (2n+1)^2 \cdot (2n+2)^2} = \frac{(4n+4)!}{((2n+2)!)^2} = \binom{4n+4}{2n+2} = P, \end{aligned}$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{8 \cdot (2n+1)}{n+1} \geqslant \frac{(4n+1) \cdot (4n+2) \cdot (4n+3) \cdot (4n+4)}{(2n+1)^2 \cdot (2n+2)^2}. \quad (\heartsuit)$$

Przekształcanie nierówności $(\heartsuit)$ prowadzi do kolejnych nierówności równoważnych:

$$\begin{aligned} \frac{8 \cdot (2n+1)}{n+1} &\geqslant \frac{2 \cdot (4n+1) \cdot (4n+3)}{(2n+1) \cdot (n+1)}, \\ 4 \cdot (2n+1) &\geqslant \frac{(4n+1) \cdot (4n+3)}{2n+1}, \\ 4 \cdot (2n+1)^2 &\geqslant (4n+1) \cdot (4n+3), \\ 16n^2 + 16n + 4 &\geqslant 16n^2 + 16n + 3, \\ 1 &\geqslant 0, \end{aligned}$$

a zatem nierówność $(\heartsuit)$ jest prawdziwa dla każdej liczby n .

Drugi krok indukcyjny został więc przeprowadzony dla każdego n naturalnego.

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej n .