

KOŁOKWIUM nr 2, 22.10.2018, godz. 14:15–15:00**Zadanie 3. (10 punktów)**

Dowieść, że liczba $\log_{45} 75$ jest niewymierna.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\log_{45} 75$ jest wymierna i niech m/n będzie jej przedstawieniem w postaci ilorazu liczb naturalnych (zauważmy, że jest to liczba dodatnia). Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\log_{45} 75 = \frac{m}{n},$$

$$45^{m/n} = 75,$$

$$45^m = 75^n.$$

Wykażemy, że powyższe równanie nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych m, n .

Rozkładając obie strony powyższej równości na iloczyny potęg liczb pierwszych otrzymujemy

$$3^{2m} \cdot 5^m = 3^n \cdot 5^{2n}.$$

Z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze wynika, że wykładniki przy odpowiednich potęgach liczb pierwszych po obu stronach równości są równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases} 2m = n \\ m = 2n \end{cases}$$

Jednak powyższy układ równań nie ma rozwiązania w liczbach dodatnich m, n , gdyż dla takiego rozwiązania mielibyśmy

$$n = 2m > m = 2n > n,$$

czyli $n > n$, co nie może być prawdą.

Inne rozumowanie: rozwiązujemy układ równań i stwierdzamy, że jedyne rozwiązanie rzeczywiste $m = n = 0$ nie jest rozwiązaniem w liczbach naturalnych.

Doszliśmy do sprzeczności z założeniem, że liczba $\log_{45} 75$ jest wymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba $\log_{45} 75$ jest niewymierna.

Zadanie 4. (10 punktów)

Podać przykład takiej liczby rzeczywistej dodatniej $x \neq 1$, że liczba $\log_x(x+10)$ jest wymierna.

Oczywista oczywistość: Uzasadnić poprawność podanego przykładu, np. przez wyliczenie wartości $\log_x(x+10)$.

Rozwiązanie:

Sposób I:

Zakładając, że

$$\log_x(x+10) = w,$$

otrzymujemy równanie

$$x^w = x + 10. \quad (\#)$$

Wybieramy taką wartość wymierną w , abyśmy umieli rozwiązać równanie $(\#)$ i liczymy na to, że znajdziemy rozwiązanie dodatnie. Dla $w = 2$ równanie $(\#)$ przybiera postać

$$x^2 = x + 10.$$

Rozwiązujemy powyższe równanie kwadratowe¹ otrzymując

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{41}}{2},$$

a ponieważ interesuje nas rozwiązanie dodatnie, przyjmujemy

$$x = \frac{1 + \sqrt{41}}{2}$$

i wówczas

$$\log_x(x+10) = \log_x x^2 = 2$$

jest liczbą wymierną.

Sposób II:

Postępujemy jak w sposobie I przyjmując $w = -1$, co prowadzi nas do równania

$$x^{-1} = x + 10$$

mającego rozwiązanie dodatnie

$$x = \sqrt{26} - 5.$$

Wówczas

$$\log_x(x+10) = \log_x x^{-1} = -1$$

jest liczbą wymierną.

Sposób III:

Przypominamy sobie zadanie **54** z **listy 04**, z którego wiemy, że

$$\log_{(\sqrt{2}-1)}(\sqrt{2}+1) = -1.$$

Zastanowiwszy się na uogólnieniu powyższej równości dochodzimy do

$$\log_{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}) = -1.$$

Dla $n = 25$ otrzymujemy rozwiązanie zadania $x = \sqrt{26} - 5$.

¹Standardowe rachunki są tu pominięte, ale na kolokwium powinny się znaleźć w rozwiązaniu.