

KOŁOKWIUM nr 4, 19.11.2018, godz. 14:15–15:00**Zadanie 7. (10 punktów)**

Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leq \sqrt[4]{n^2 + 15n\sqrt{n}} - \sqrt{n} \leq 4C.$$

Rozwiązanie:

Sposób I

Ponieważ wyrażenie dane w treści zadania jest różnicą wyrażeń zbliżonej wielkości, zastosujemy wzór na różnicę czwartych potęg w postaci

$$a - b = \frac{a^4 - b^4}{a^3 + a^2b + ab^2 + b^3},$$

gdzie przy dodatnich a, b mianownik jest zawsze różny od zera. Otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \sqrt[4]{n^2 + 15n\sqrt{n}} - \sqrt{n} = \\ &= \frac{15n\sqrt{n}}{\left(\sqrt[4]{n^2 + 15n\sqrt{n}}\right)^3 + \sqrt{n} \cdot \left(\sqrt[4]{n^2 + 15n\sqrt{n}}\right)^2 + n \cdot \sqrt[4]{n^2 + 15n\sqrt{n}} + n\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Szacujemy ostatnie wyrażenie od dołu, szacując mianownik od góry:

$$\begin{aligned} & \frac{15n\sqrt{n}}{\left(\sqrt[4]{n^2 + 15n\sqrt{n}}\right)^3 + \sqrt{n} \cdot \left(\sqrt[4]{n^2 + 15n\sqrt{n}}\right)^2 + n \cdot \sqrt[4]{n^2 + 15n\sqrt{n}} + n\sqrt{n}} \geq \\ & \geq \frac{15n\sqrt{n}}{\left(\sqrt[4]{n^2 + 15n^2}\right)^3 + \sqrt{n} \cdot \left(\sqrt[4]{n^2 + 15n^2}\right)^2 + n \cdot \sqrt[4]{n^2 + 15n^2} + n\sqrt{n}} = \\ & = \frac{15n\sqrt{n}}{8n\sqrt{n} + 4n\sqrt{n} + 2n\sqrt{n} + n\sqrt{n}} = \frac{15n\sqrt{n}}{15n\sqrt{n}} = 1 \end{aligned}$$

i od góry (szacując mianownik od dołu):

$$\begin{aligned} & \frac{15n\sqrt{n}}{\left(\sqrt[4]{n^2 + 15n\sqrt{n}}\right)^3 + \sqrt{n} \cdot \left(\sqrt[4]{n^2 + 15n\sqrt{n}}\right)^2 + n \cdot \sqrt[4]{n^2 + 15n\sqrt{n}} + n\sqrt{n}} \leq \\ & \leq \frac{15n\sqrt{n}}{\left(\sqrt[4]{n^2 + 0}\right)^3 + \sqrt{n} \cdot \left(\sqrt[4]{n^2 + 0}\right)^2 + n \cdot \sqrt[4]{n^2 + 0} + n\sqrt{n}} = \frac{15n\sqrt{n}}{4n\sqrt{n}} = \frac{15}{4} < 4. \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy więc wymagane oszacowania ze stałą $C = 1$.

Sposób II

Oznaczamy dane w treści zadania wyrażenie przez a_n i po zastosowaniu wzoru skróconego mnożenia jak w sposobie I przepisujemy je w postaci

$$a_n = \frac{15n\sqrt{n}}{\left(\sqrt[4]{n^2 + 15n\sqrt{n}}\right)^3 + \sqrt{n} \cdot \left(\sqrt[4]{n^2 + 15n\sqrt{n}}\right)^2 + n \cdot \sqrt[4]{n^2 + 15n\sqrt{n}} + n\sqrt{n}} =$$

$$= \frac{15}{\left(\sqrt[4]{1+\frac{15}{\sqrt{n}}}\right)^3 + \left(\sqrt[4]{1+\frac{15}{\sqrt{n}}}\right)^2 + \sqrt[4]{1+\frac{15}{\sqrt{n}}} + 1}.$$

Ponieważ licznik ostatniego wyrażenia jest stały, a mianownik maleje wraz ze wzrostem n , ciąg (a_n) jest rosnący. Stąd wynika, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$a_1 \leq a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Ponieważ $a_1 = 1$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 15/4 < 4$, otrzymujemy wymagane oszacowania ze stałą $C = 1$.

Sposób III

Ponieważ wyrażenie dane w treści zadania jest różnicą wyrażeń zbliżonej wielkości, dwukrotnie zastosujemy wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b},$$

gdzie przy dodatnich a, b mianownik jest zawsze różny od zera. Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{n^2 + 15n\sqrt{n}} - \sqrt{n} &= \frac{\sqrt{n^2 + 15n\sqrt{n}} - n}{\sqrt[4]{n^2 + 15n\sqrt{n}} + \sqrt{n}} = \\ &= \frac{15n\sqrt{n}}{\left(\sqrt[4]{n^2 + 15n\sqrt{n}} + \sqrt{n}\right) \cdot \left(\sqrt{n^2 + 15n\sqrt{n}} + n\right)}. \end{aligned}$$

Szacujemy ostatnie wyrażenie od dołu, szacując mianownik od góry:

$$\begin{aligned} \frac{15n\sqrt{n}}{\left(\sqrt[4]{n^2 + 15n\sqrt{n}} + \sqrt{n}\right) \cdot \left(\sqrt{n^2 + 15n\sqrt{n}} + n\right)} &\geq \frac{15n\sqrt{n}}{\left(\sqrt[4]{n^2 + 15n^2} + \sqrt{n}\right) \cdot \left(\sqrt{n^2 + 15n^2} + n\right)} = \\ &= \frac{15n\sqrt{n}}{3\sqrt{n} \cdot 5n} = \frac{15n\sqrt{n}}{15n\sqrt{n}} = 1 \end{aligned}$$

i od góry (szacując mianownik od dołu):

$$\begin{aligned} \frac{15n\sqrt{n}}{\left(\sqrt[4]{n^2 + 15n\sqrt{n}} + \sqrt{n}\right) \cdot \left(\sqrt{n^2 + 15n\sqrt{n}} + n\right)} &\leq \\ &\leq \frac{15n\sqrt{n}}{\left(\sqrt[4]{n^2 + 0} + \sqrt{n}\right) \cdot \left(\sqrt{n^2 + 0} + n\right)} = \frac{15n\sqrt{n}}{2\sqrt{n} \cdot 2n} = \frac{15n\sqrt{n}}{4n\sqrt{n}} = \frac{15}{4} < 4. \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy więc wymagane oszacowania ze stałą $C = 1$.

Sposób IV

Oznaczamy dane w treści zadania wyrażenie przez a_n i po zastosowaniu wzorów skróconego mnożenia jak w sposobie III przepisujemy je w postaci

$$a_n = \frac{15n\sqrt{n}}{\left(\sqrt[4]{n^2 + 15n\sqrt{n}} + \sqrt{n}\right) \cdot \left(\sqrt{n^2 + 15n\sqrt{n}} + n\right)} = \frac{15}{\left(\sqrt[4]{1 + \frac{15}{\sqrt{n}}} + 1\right) \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{15}{\sqrt{n}}} + 1\right)}.$$

Ponieważ licznik ostatniego wyrażenia jest stały, a mianownik maleje wraz ze wzrostem n , ciąg (a_n) jest rosnący. Stąd wynika, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$a_1 \leq a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Ponieważ $a_1 = 1$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 15/4 < 4$, otrzymujemy wymagane oszacowania ze stałą $C = 1$.

Zadanie 8. (10 punktów)

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt[3]{n^{18} + n^7} - n^6\right)^2}{\left(\sqrt{n^{18} + n^7} - n^9\right)^5}.$$

Rozwiązanie:

Stosując w mianowniku wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b},$$

a w liczniku wzór na różnicę sześcianów w postaci

$$a - b = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2}$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt[3]{n^{18} + n^7} - n^6\right)^2}{\left(\sqrt{n^{18} + n^7} - n^9\right)^5} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^7}{(n^{18} + n^7)^{2/3} + n^6 \cdot (n^{18} + n^7)^{1/3} + n^{12}} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{n^{18} + n^7} + n^9}{n^7} \right)^5 = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^{-5}}{(1 + n^{-11})^{2/3} + (1 + n^{-11})^{1/3} + 1} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{1 + n^{-11}} + 1}{n^{-2}} \right)^5 = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{1 + n^{-11}} + 1\right)^5}{\left((1 + n^{-11})^{2/3} + (1 + n^{-11})^{1/3} + 1\right)^2} \cdot \frac{n^{-10}}{n^{-10}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{1 + n^{-11}} + 1\right)^5}{\left((1 + n^{-11})^{2/3} + (1 + n^{-11})^{1/3} + 1\right)^2} = \frac{\left(\sqrt{1 + 0} + 1\right)^5}{\left((1 + 0)^{2/3} + (1 + 0)^{1/3} + 1\right)^2} = \frac{2^5}{3^2} = \frac{32}{9}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu granica ma wartość $32/9$.