

**KOŁOKWIUM nr 5, 26.11.2018, godz. 14:15–15:00****Zadanie 9. (10 punktów)**

W każdym z zadań **9.1–9.5** podaj granicę (lub granicę niewłaściwą) ciągu. Liczby wymierne podaj w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

Za każdą poprawną odpowiedź otrzymasz **2 punkty**.

$$9.1. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+2+4+8+\dots+2^k+\dots+64^n}{1+4+16+64+\dots+4^k+\dots+64^n} = \mathbf{3/2}$$

$$9.2. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+4+16+64+\dots+4^k+\dots+64^n}{1+8+64+512+\dots+8^k+\dots+64^n} = \mathbf{7/6}$$

$$9.3. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+2+4+8+\dots+2^k+\dots+64^n}{1+8+64+512+\dots+8^k+\dots+64^n} = \mathbf{7/4}$$

$$9.4. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+8+64+512+\dots+8^k+\dots+64^n}{1+64+4096+\dots+64^k+\dots+64^n} = \mathbf{9/8}$$

$$9.5. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+4+16+64+\dots+4^k+\dots+64^n}{1+64+4096+\dots+64^k+\dots+64^n} = \mathbf{21/16}$$

**Zadanie 10. (10 punktów)**

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt{n^2}}{(n+B)^2} + \frac{\sqrt{n^2+3}}{(n+B)^2+1} + \frac{\sqrt{n^2+6}}{(n+B)^2+2} + \frac{\sqrt{n^2+9}}{(n+B)^2+3} + \frac{\sqrt{n^2+12}}{(n+B)^2+4} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{\sqrt{n^2+3k}}{(n+B)^2+k} + \dots + \frac{\sqrt{(n+A)^2-9}}{(n+6)^2-3} + \frac{\sqrt{(n+A)^2-6}}{(n+6)^2-2} + \frac{\sqrt{(n+A)^2-3}}{(n+6)^2-1} + \frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+6)^2} \right)$$

dla tak dobranych liczb całkowitych  $A > 0$  i  $B < 6$ , aby zadanie miało sens.

*Rozwiązanie:*

Ponieważ ostatni składnik sumy występującej w zadaniu może być zapisany jako

$$\frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+6)^2} = \frac{\sqrt{n^2+2An+A^2}}{n^2+12n+36} = \frac{\sqrt{n^2+3 \cdot \frac{2An+A^2}{3}}}{n^2+2Bn+B^2+(2(6-B)n+36-B^2)},$$

cała suma przybiera postać

$$\sum_{k=0}^{N(n)} \frac{\sqrt{n^2+3k}}{(n+B)^2+k}, \quad (1)$$

gdzie

$$N(n) = \frac{2An+A^2}{3} = 2(6-B)n+36-B^2, \quad (2)$$

i w konsekwencji ma  $N(n)+1$  składników. Aby zadanie miało sens, dla każdego  $n$  obie wartości  $N(n)$  określone równaniami (2) muszą być równe i całkowite.

W celu znalezienia takich  $A$  i  $B$ , aby prawe równanie (2) było spełnione dla każdej liczby naturalnej  $n$ , dokonujemy następujących jego przekształceń:

$$\begin{aligned} 2An + A^2 &= 3 \cdot (2(6-B)n + 36 - B^2) , \\ 2An + A^2 &= 6(6-B)n + 3(36 - B^2) . \end{aligned} \quad (3)$$

Aby równość (3) zachodziła dla każdej liczby naturalnej  $n$ , odpowiednie współczynniki po obu jej stronach muszą być równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases} 2A &= 6(6-B) \\ A^2 &= 3(36-B^2) \end{cases} \quad \begin{cases} A &= 3(6-B) \\ A^2 &= 3(6-B)(6+B) \end{cases}$$

Dzieląc stronami drugie równanie przez pierwsze<sup>1</sup> otrzymujemy  $A = 6 + B$ , co po podstawieniu do równania pierwszego daje

$$6 + B = 18 - 3B ,$$

skąd  $B = 3$  i  $A = 9$ . Wstawiając te wartości do równości (2) otrzymujemy

$$N(n) = 6n + 27 .$$

Wobec tego suma występująca pod znakiem granicy ma  $6n + 28$  składników.

Przystępując do rozwiązania właściwej części zadania szacujemy sumę (1) obustronnie mnożąc liczbę składników przez ułamek, w którym wykonano niezależne szacowania na poziomie liczników i mianowników:

$$(6n+28) \cdot \frac{\sqrt{n^2}}{(n+6)^2} \leq \sum_{k=0}^{6n+27} \frac{\sqrt{n^2+3k}}{(n+3)^2+k} \leq (6n+28) \cdot \frac{\sqrt{(n+9)^2}}{(n+3)^2} ,$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego przy  $n \rightarrow +\infty$ .

Otrzymujemy

$$(6n+28) \cdot \frac{\sqrt{n^2}}{(n+6)^2} = \frac{(6n+28) \cdot n}{(n+6)^2} = \frac{6 + \frac{28}{n}}{\left(1 + \frac{6}{n}\right)^2} \rightarrow 6$$

oraz

$$(6n+28) \cdot \frac{\sqrt{(n+9)^2}}{(n+3)^2} = \frac{(6n+28) \cdot (n+9)}{(n+3)^2} = \frac{\left(6 + \frac{28}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{9}{n}\right)}{\left(1 + \frac{3}{n}\right)^2} \rightarrow 6 .$$

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa 6.

**Odpowiedź:** Zadanie ma sens dla  $A = 9$ ,  $B = 3$  i wówczas dana w zadaniu granica jest równa 6.

---

<sup>1</sup>Z warunków podanych w treści zadania  $A > 0$  i  $B < 6$ , skąd wynika, że obie strony pierwszego równania są dodatnie, a więc niezerowe.