

KOŁOKWIUM nr 71, 18.10.2018, godz. 8:15–9:00**Zadanie 71. (10 punktów)**

Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^n i^7 < \frac{n^4 \cdot (n+1)^4}{8}.$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n = 1$ mamy $L = 1$ oraz $P = 2$, skąd $L < P$.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$\sum_{i=1}^n i^7 < \frac{n^4 \cdot (n+1)^4}{8}.$$

Wykażemy, że wówczas

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^7 < \frac{(n+1)^4 \cdot (n+2)^4}{8}. \quad (\clubsuit)$$

Wychodząc od lewej strony równości $(\clubsuit)$ i korzystając z założenia indukcyjnego otrzymujemy

$$\begin{aligned} L = \sum_{i=1}^{n+1} i^7 &= \sum_{i=1}^n i^7 + (n+1)^7 < \frac{n^4 \cdot (n+1)^4}{8} + (n+1)^7 = \frac{(n+1)^4}{8} \cdot (n^4 + 8 \cdot (n+1)^3) = \\ &= \frac{(n+1)^4}{8} \cdot (n^4 + 8n^3 + 24n^2 + 24n + 8) < \\ &< \frac{(n+1)^4}{8} \cdot (n^4 + 8n^3 + 24n^2 + 32n + 16) = \frac{(n+1)^4 \cdot (n+2)^4}{8} = P. \end{aligned}$$

Drugi krok indukcyjny został więc przeprowadzony dla każdego n naturalnego.

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej n .

Zadanie 72. (10 punktów)

Przy każdym z poniższych 28 zdań w miejscu kropek postaw jedną z liter **P**, **F**, **N**:

P - jest **P**rawdą (tzn. musi być prawdziwe)

F - jest **F**ałszem (tzn. musi być fałszywe)

N - może być prawdziwe lub fałszywe (tzn. **N**ie wiadomo, czasem bywa prawdziwe, a czasem fałszywe)

Za podanie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz $\max(0, n - 18)$ punktów.

O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że

- dla każdej liczby naturalnej n zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(2n+1)$,
- dla każdej liczby naturalnej $n > 7$ zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n-7)$,
- implikacja $T(14) \Rightarrow T(13)$ jest fałszywa.

Co można wnioskować o prawdziwości implikacji:

a) $T(70) \Rightarrow T(770) \dots \mathbf{P}$

b) $T(70) \Rightarrow T(771) \dots \mathbf{P}$

c) $T(70) \Rightarrow T(772) \dots \mathbf{N}$

d) $T(70) \Rightarrow T(773) \dots \mathbf{P}$

e) $T(70) \Rightarrow T(774) \dots \mathbf{N}$

f) $T(70) \Rightarrow T(775) \dots \mathbf{N}$

g) $T(70) \Rightarrow T(776) \dots \mathbf{F}$

h) $T(71) \Rightarrow T(771) \dots \mathbf{P}$

i) $T(71) \Rightarrow T(772) \dots \mathbf{N}$

j) $T(71) \Rightarrow T(773) \dots \mathbf{P}$

k) $T(71) \Rightarrow T(774) \dots \mathbf{N}$

l) $T(71) \Rightarrow T(775) \dots \mathbf{N}$

m) $T(71) \Rightarrow T(776) \dots \mathbf{F}$

n) $T(72) \Rightarrow T(772) \dots \mathbf{P}$

o) $T(72) \Rightarrow T(773) \dots \mathbf{P}$

p) $T(72) \Rightarrow T(774) \dots \mathbf{P}$

q) $T(72) \Rightarrow T(775) \dots \mathbf{P}$

r) $T(72) \Rightarrow T(776) \dots \mathbf{N}$

s) $T(73) \Rightarrow T(773) \dots \mathbf{P}$

t) $T(73) \Rightarrow T(774) \dots \mathbf{N}$

u) $T(73) \Rightarrow T(775) \dots \mathbf{N}$

v) $T(73) \Rightarrow T(776) \dots \mathbf{F}$

w) $T(74) \Rightarrow T(774) \dots \mathbf{P}$

x) $T(74) \Rightarrow T(775) \dots \mathbf{P}$

y) $T(74) \Rightarrow T(776) \dots \mathbf{N}$

z) $T(75) \Rightarrow T(775) \dots \mathbf{P}$

ż) $T(75) \Rightarrow T(776) \dots \mathbf{N}$

ż) $T(76) \Rightarrow T(776) \dots \mathbf{P}$