

KOŁOKWIUM nr 72, 25.10.2018, godz. 8:15–9:00**Zadanie 73. (10 punktów)**

Podać 4 przykłady liczb rzeczywistych dodatnich $x \neq 1$, dla których liczba $\log_x(x+120)$ jest wymierna.

Oczywista oczywistość: Uzasadnić poprawność podanych przykładów, np. przez wyliczenie wartości $\log_x(x+120)$.

Rozwiązanie:

Przykład I:

Dla $x = 5$ liczba $\log_x(x+120) = \log_5 125 = 3$ jest liczbą wymierną.

Przykład II:

Dla $x = 8$ liczba $\log_x(x+120) = \log_8 128 = \frac{7}{3}$ jest liczbą wymierną.

Przykład III:

Zakładając, że

$$\log_x(x+120) = w,$$

otrzymujemy równanie

$$x^w = x + 120. \quad (\#)$$

Wybieramy taką wartość wymierną w , abyśmy umieli rozwiązać równanie $(\#)$ i liczymy na to, że znajdziemy rozwiązanie dodatnie. Dla $w = 2$ równanie $(\#)$ przybiera postać

$$x^2 = x + 120.$$

Rozwiązujemy powyższe równanie kwadratowe¹ otrzymując

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{481}}{2},$$

a ponieważ interesuje nas rozwiązanie dodatnie, przyjmujemy

$$x = \frac{1 + \sqrt{481}}{2}$$

i wówczas

$$\log_x(x+120) = \log_x x^2 = 2$$

jest liczbą wymierną.

Przykład IV:

Postępujemy jak w przykładzie III przyjmując $w = -1$, co prowadzi nas do równania

$$x^{-1} = x + 120$$

mającego rozwiązanie dodatnie

$$x = \sqrt{3601} - 60.$$

Wówczas

$$\log_x(x+120) = \log_x x^{-1} = -1$$

jest liczbą wymierną.

Inny sposób uzyskania tego przykładu: W równości

$$\log_{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}) = -1.$$

podstawiamy $n = 3600$, skąd otrzymujemy $x = \sqrt{3601} - 60$.

¹Standardowe rachunki są tu pominięte, ale na kolokwium powinny się znaleźć w rozwiązaniu.

Zadanie 74. (10 punktów)

Przy każdym z poniższych 28 zdań w miejscu kropek postaw jedną z liter **P**, **F**, **N**:

P - jest **P**rawdą (tzn. musi być prawdziwe)

F - jest **F**ałszem (tzn. musi być fałszywe)

N - może być prawdziwe lub fałszywe (tzn. **N**ie wiadomo, czasem bywa prawdziwe, a czasem fałszywe)

Za podanie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz $\max(0, n - 18)$ punktów.

O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że

- dla każdej liczby naturalnej n zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(2n+3)$,
- dla każdej liczby naturalnej $n > 7$ zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n-7)$,
- implikacja $T(14) \Rightarrow T(13)$ jest fałszywa.

Co można wywnioskować o prawdziwości implikacji:

a) $T(70) \Rightarrow T(770) \dots \mathbf{P}$

b) $T(70) \Rightarrow T(771) \dots \mathbf{F}$

c) $T(70) \Rightarrow T(772) \dots \mathbf{P}$

d) $T(70) \Rightarrow T(773) \dots \mathbf{P}$

e) $T(70) \Rightarrow T(774) \dots \mathbf{N}$

f) $T(70) \Rightarrow T(775) \dots \mathbf{F}$

g) $T(70) \Rightarrow T(776) \dots \mathbf{F}$

h) $T(71) \Rightarrow T(771) \dots \mathbf{P}$

i) $T(71) \Rightarrow T(772) \dots \mathbf{P}$

j) $T(71) \Rightarrow T(773) \dots \mathbf{P}$

k) $T(71) \Rightarrow T(774) \dots \mathbf{P}$

l) $T(71) \Rightarrow T(775) \dots \mathbf{P}$

m) $T(71) \Rightarrow T(776) \dots \mathbf{P}$

n) $T(72) \Rightarrow T(772) \dots \mathbf{P}$

o) $T(72) \Rightarrow T(773) \dots \mathbf{P}$

p) $T(72) \Rightarrow T(774) \dots \mathbf{N}$

q) $T(72) \Rightarrow T(775) \dots \mathbf{F}$

r) $T(72) \Rightarrow T(776) \dots \mathbf{F}$

s) $T(73) \Rightarrow T(773) \dots \mathbf{P}$

t) $T(73) \Rightarrow T(774) \dots \mathbf{N}$

u) $T(73) \Rightarrow T(775) \dots \mathbf{F}$

v) $T(73) \Rightarrow T(776) \dots \mathbf{F}$

w) $T(74) \Rightarrow T(774) \dots \mathbf{P}$

x) $T(74) \Rightarrow T(775) \dots \mathbf{N}$

y) $T(74) \Rightarrow T(776) \dots \mathbf{N}$

z) $T(75) \Rightarrow T(775) \dots \mathbf{P}$

ż) $T(75) \Rightarrow T(776) \dots \mathbf{P}$

ż) $T(76) \Rightarrow T(776) \dots \mathbf{P}$