

KOŁOKWIUM nr **73**, 8.11.2018, godz. 8:15–9:00Zadanie **75.** (10 punktów)

Wskaż liczby rzeczywiste a i k , dla których podana granica istnieje i jest dodatnią liczbą rzeczywistą. Podaj wartość granicy dla tych wartości parametrów a i k . Jeżeli odpowiedź jest liczbą wymierną, podaj ją w postaci **ułamka nieskracalnego lub liczby całkowitej**. Za każde zadanie, w którym podasz poprawną odpowiedź (liczby a i k oraz uproszczona granica) otrzymasz **2 punkty**.

W zadaniach skorzystaj ze wzoru Stirlinga:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot e^n}{n^n \cdot \sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}.$$

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a^n \cdot n^k \cdot \binom{2n}{n} \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \quad \text{dla } a = \frac{1}{4} \quad k = \frac{1}{2}$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a^n \cdot n^k \cdot \binom{3n}{n} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot \sqrt{\pi}} \quad \text{dla } a = \frac{4}{27} \quad k = \frac{1}{2}$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a^n \cdot n^k \cdot \binom{4n}{n} \right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3\pi}} \quad \text{dla } a = \frac{27}{256} \quad k = \frac{1}{2}$$

$$\text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a^n \cdot n^k \cdot \binom{4n}{2n} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{dla } a = \frac{1}{16} \quad k = \frac{1}{2}$$

$$\text{e) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a^n \cdot n^k \cdot \binom{2n}{n} \cdot \binom{3n}{n} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \quad \text{dla } a = \frac{1}{27} \quad k = 1$$

Zadanie 76. (10 punktów)

Liczby wymierne dodatnie a i b spełniają warunek $a^b = 2$. Dowieść, że liczby a i $1/b$ są całkowite.

Rozwiązanie:

Zapiszmy liczby a i b w postaci ułamków nieskracalnych o naturalnym liczniku i mianowniku:

$$a = \frac{m}{n}, \quad b = \frac{s}{t}.$$

Otrzymujemy wówczas kolejno:

$$\begin{aligned} \left(\frac{m}{n}\right)^{s/t} &= 2, \\ \left(\frac{m}{n}\right)^s &= 2^t, \\ m^s &= 2^t \cdot n^s. \end{aligned} \tag{\heartsuit}$$

Dowód całkowitości liczby $\mathbf{a}$, czyli równości $\mathbf{n} = \mathbf{1}$ (dowód nie wprost):

Jeżeli liczba n jest większa od 1, to ma dzielnik pierwszy, oznaczmy go przez p . Wówczas prawa strona równości $(\heartsuit)$ jest podzielna przez p , a zatem lewa strona też jest podzielna przez p . Skoro jednak liczba m^s jest podzielna przez liczbę pierwszą p , to także m jest podzielne przez p , co przeczy założeniu, że liczby m i n są względnie pierwsze.

Dowód całkowitości liczby $\mathbf{1/b}$:

Skoro wiemy już, że $n = 1$, równanie $(\heartsuit)$ przyjmuje postać

$$m^s = 2^t. \tag{\diamondsuit}$$

Stąd wynika, że m jest potęgą dwójki o wykładniku naturalnym, powiedzmy $m = 2^k$, co po podstawieniu do równania $(\diamondsuit)$ daje

$$2^{ks} = 2^t.$$

Wobec tego $ks = t$, skąd $k = t/s = 1/b$ jest liczbą całkowitą.