

KOŁOKWIUM nr 74, 22.11.2018, godz. 8:15–9:00**Zadanie 77. (10 punktów)**

Wskaż liczbę wymierną dodatnią a , dla której podana granica istnieje i jest dodatnią liczbą wymierną. Podaj wartość granicy dla tej wartości parametru a . Podaj odpowiedzi w postaci **ułamka nieskracalnego lub liczby całkowitej**. Za każde zadanie, w którym podasz poprawną odpowiedź (liczba a oraz uproszczona granica) otrzymasz **3 punkty**.

Dziesiąty punkt otrzymasz za komplet poprawnych odpowiedzi.

W zadaniach skorzystaj ze wzoru Stirlinga:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot e^n}{n^n \cdot \sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}.$$

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a^{4n} \cdot \binom{8n}{4n} \cdot \sqrt{n\pi} \right) = \frac{1}{2} \quad \text{dla } a = \frac{1}{4}$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a^{6n} \cdot \binom{9n}{n} \cdot \sqrt{n\pi} \right) = \frac{3}{4} \quad \text{dla } a = \frac{16}{27}$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a^{6n} \cdot \binom{9n}{4n} \cdot \binom{5n}{n} \cdot 16^n \cdot n\pi \right) = \frac{3}{8} \quad \text{dla } a = \frac{4}{27}$$

Zadanie 78. (10 punktów)

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^n + 3^{2n}}{9^n} + \frac{2^{n+1} + 3^{2n-1}}{9^{n-1} \cdot 4} + \frac{2^{n+2} + 3^{2n-2}}{9^{n-2} \cdot 4^2} + \dots + \frac{2^{n+k} + 3^{2n-k}}{9^{n-k} \cdot 4^k} + \dots + \frac{2^{2n} + 3^n}{4^n} \right).$$

Rozwiązanie:

Zapisujemy wyrażenie pod znakiem granicy w postaci sumy dwóch postępów geometrycznych, obliczamy ich sumy, a następnie przechodzimy do granicy:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{2^{n+k} + 3^{2n-k}}{9^{n-k} \cdot 4^k} &= \sum_{k=0}^n \frac{2^{n+k}}{9^{n-k} \cdot 4^k} + \sum_{k=0}^n \frac{3^{2n-k}}{9^{n-k} \cdot 4^k} = \sum_{k=0}^n \left(\frac{2}{9}\right)^n \cdot \left(\frac{9}{2}\right)^k + \sum_{k=0}^n \left(\frac{3}{4}\right)^k = \\ &= \left(\frac{2}{9}\right)^n \cdot \frac{\left(\frac{9}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{9}{2} - 1} + \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - 1}{\frac{3}{4} - 1} = \frac{\frac{9}{2} - \left(\frac{2}{9}\right)^n}{7/2} + \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - 1}{-1/4} \rightarrow \frac{9/2}{7/2} + \frac{-1}{-1/4} = \\ &= \frac{9}{7} + 4 = \frac{37}{7}. \end{aligned}$$