

KOŁOKWIUM nr 75, 29.11.2018, godz. 8:15–9:00**Zadanie 79.** (10 punktów)

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^{2n} + 7^{2n}}{7^{2n}} + \frac{2^{2n+2} + 7^{2n-1}}{2^4 \cdot 7^{2n-2}} + \frac{2^{2n+4} + 7^{2n-2}}{2^8 \cdot 7^{2n-4}} + \dots + \frac{2^{2n+2k} + 7^{2n-k}}{2^{4k} \cdot 7^{2n-2k}} + \dots + \frac{2^{4n} + 7^n}{2^{4n}} \right).$$

Rozwiązanie:

Zapisujemy wyrażenie pod znakiem granicy w postaci sumy dwóch postępów geometrycznych, obliczamy ich sumy, a następnie przechodzimy do granicy:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{2^{2n+2k} + 7^{2n-k}}{2^{4k} \cdot 7^{2n-2k}} &= \sum_{k=0}^n \frac{2^{2n+2k}}{2^{4k} \cdot 7^{2n-2k}} + \sum_{k=0}^n \frac{7^{2n-k}}{2^{4k} \cdot 7^{2n-2k}} = \sum_{k=0}^n \left(\frac{4}{49} \right)^n \cdot \left(\frac{49}{4} \right)^k + \sum_{k=0}^n \left(\frac{7}{16} \right)^k = \\ &= \left(\frac{4}{49} \right)^n \cdot \frac{\left(\frac{49}{4} \right)^{n+1} - 1}{\frac{49}{4} - 1} + \frac{\left(\frac{7}{16} \right)^{n+1} - 1}{\frac{7}{16} - 1} = \frac{\frac{49}{4} - \left(\frac{4}{49} \right)^n}{45/4} + \frac{\left(\frac{7}{16} \right)^{n+1} - 1}{-9/16} \rightarrow \frac{49/4}{45/4} + \frac{-1}{-9/16} = \\ &= \frac{49}{45} + \frac{16}{9} = \frac{49+80}{45} = \frac{129}{45} = \frac{43}{15}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu granica ma wartość 43/15.

Zadanie 80. (10 punktów)

Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru

$$\left\{ \sqrt{n^2 + 7n + 12} - n : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Rozwiązanie:

Przekształcając wyrażenie definiujące dany w zadaniu zbiór otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2 + 7n + 12} - n &= \sqrt{n^2 + 7n + 12} - \left(n + \frac{7}{2} \right) + \frac{7}{2} = \frac{n^2 + 7n + 12 - \left(n + \frac{7}{2} \right)^2}{\sqrt{n^2 + 7n + 12} + \left(n + \frac{7}{2} \right)} + \frac{7}{2} = \\ &= \frac{n^2 + 7n + 12 - n^2 - 7n - \frac{49}{4}}{\sqrt{n^2 + 7n + 12} + \left(n + \frac{7}{2} \right)} + \frac{7}{2} = -\frac{1/4}{\sqrt{n^2 + 7n + 12} + \left(n + \frac{7}{2} \right)} + \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

Z otrzymanej postaci wynika, że podane wyrażenie rośnie wraz z n , a przy $n \rightarrow \infty$ dąży do $7/2$.Dla zakończenia rozwiązania wystarczy odnotować, że w ciągu rosnącym pierwszy wyraz (tu równy $\sqrt{20} - 1$) jest najmniejszy, a kresem górnym zbioru wyrazów jest granica ciągu.**Odpowiedź:**Kres dolny danego zbioru jest równy $2\sqrt{5} - 1 \approx 3,47$, a kres górny $7/2 = 3,5$.