

KOŁOKWIUM nr 76, 6.12.2018, godz. 8:15–9:00**Zadanie 81. (10 punktów)**Obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+4)}$.*Rozwiązanie:*

Rozłóżmy na ułamki proste wyraz ogólny szeregu:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+4)} &= \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+4}, \\ 1 &= A \cdot (n+1) \cdot (n+4) + B \cdot n \cdot (n+4) + C \cdot n \cdot (n+1), \\ \text{dla } n=0: \quad 1 &= 4A, \quad A = 1/4, \\ \text{dla } n=-1: \quad 1 &= -3B, \quad B = -1/4, \\ \text{dla } n=-4: \quad 1 &= 12C, \quad C = 1/12. \end{aligned}$$

Zatem

$$\frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+4)} = \frac{1/4}{n} - \frac{1/3}{n+1} + \frac{1/12}{n+4}.$$

W konsekwencji sumy częściowe danego szeregu wyrażają się wzorem

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+4)} &= \sum_{n=1}^N \left(\frac{1/4}{n} - \frac{1/3}{n+1} + \frac{1/12}{n+4} \right) = \\ &= \left(\frac{1/4}{1} - \frac{1/3}{2} + \frac{1/12}{5} \right) + \left(\frac{1/4}{2} - \frac{1/3}{3} + \frac{1/12}{6} \right) + \left(\frac{1/4}{3} - \frac{1/3}{4} + \frac{1/12}{7} \right) + \\ &\quad + \left(\frac{1/4}{4} - \frac{1/3}{5} + \frac{1/12}{8} \right) + \dots + \left(\frac{1/4}{N-3} - \frac{1/3}{N-2} + \frac{1/12}{N+1} \right) + \\ &\quad + \left(\frac{1/4}{N-2} - \frac{1/3}{N-1} + \frac{1/12}{N+2} \right) + \left(\frac{1/4}{N-1} - \frac{1/3}{N} + \frac{1/12}{N+3} \right) + \left(\frac{1/4}{N} - \frac{1/3}{N+1} + \frac{1/12}{N+4} \right) = \\ &= \frac{1/4}{1} - \frac{1/12}{2} - \frac{1/12}{3} - \frac{1/12}{4} - \frac{1/4}{N+1} + \frac{1/12}{N+2} + \frac{1/12}{N+3} + \frac{1/12}{N+4} = \\ &= \frac{23}{144} - \frac{1/4}{N+1} + \frac{1/12}{N+2} + \frac{1/12}{N+3} + \frac{1/12}{N+4} \rightarrow \frac{23}{144} \end{aligned}$$

przy $N \rightarrow \infty$.*Odpowiedź:* Suma danego szeregu jest równa 23/144.

Zadanie 82. (10 punktów)

Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kres górny zbioru

$$Z = \left\{ \frac{kmn}{k^2 + 2m^4 + 2n^4} : k, m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Rozwiązanie:

Z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną zastosowanej do czterech liczb $k^2/2$, $k^2/2$, $2m^4$, $2n^4$ otrzymujemy

$$\sqrt[4]{k^4 m^4 n^4} \leq \frac{k^2 + 2m^4 + 2n^4}{4},$$

czyli

$$\frac{kmn}{k^2 + 2m^4 + 2n^4} \leq \frac{1}{4}.$$

Zatem liczba $1/4$ jest ograniczeniem górnym zbioru Z . Wykażemy, że jest to ograniczenie najmniejsze. W tym celu przyjmijmy $k = 2$ oraz $m = n = 1$. Wówczas

$$\frac{kmn}{k^2 + 2m^4 + 2n^4} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

jest elementem zbioru Z .

Odpowiedź: Kres górny zbioru Z jest równy $1/4$.