

KOŁOKWIUM nr 77, 13.12.2018, godz. 8:15–9:00**Zadanie 83. (10 punktów)**

Dobrać odpowiednią liczbę naturalną k , a następnie udowodnić, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich x, y, z, t zachodzi nierówność

$$xyzt < x^2 + y^4 + z^6 + t^k.$$

Rozwiązanie:

Przyjmujemy $k = 12$ i stosujemy nierówność między średnią geometryczną i arytmetyczną do następujących 12 liczb:

- 6 liczb $x^2/6$,
- 3 liczby $y^4/3$,
- 2 liczby $z^6/2$,
- 1 liczba t^{12} .

Otrzymujemy

$$\sqrt[12]{\frac{x^{12}y^{12}z^{12}t^{12}}{6^6 \cdot 3^3 \cdot 2^2}} \leq \frac{x^2 + y^4 + z^6 + t^{12}}{12},$$

skąd

$$xyzt \leq \frac{\sqrt[12]{6^6 \cdot 3^3 \cdot 2^2}}{12} \cdot (x^2 + y^4 + z^6 + t^{12}) < x^2 + y^4 + z^6 + t^{12},$$

o ile wykazemy, że

$$\sqrt[12]{6^6 \cdot 3^3 \cdot 2^2} < 12.$$

Jednak powyższa nierówność jest równoważna kolejnym nierównościom

$$6^6 \cdot 3^3 \cdot 2^2 < 12^{12},$$

$$2^8 \cdot 3^9 < 2^{24} \cdot 3^{12},$$

$$1 < 2^{16} \cdot 3^3,$$

jest więc prawdziwa.

Uwaga

Liczba $k = 12$ jest jedyną liczbą rzeczywistą, przy której nierówność podana w zadaniu jest prawdziwa dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich x, y, z, t . Można bowiem wykazać, że k musi spełniać równanie

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{k} = 1.$$

Dla dowodu tego faktu należy przyjąć

$$x = s^{1/2}, \quad y = s^{1/4}, \quad z = s^{1/6}, \quad t = s^{1/k},$$

a następnie zbadać, co się dzieje przy $s \rightarrow 0^+$ i przy $s \rightarrow +\infty$.

Zadanie 84. (10 punktów)

Dana jest funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \sqrt[16]{x^4 + 10^{16}}$. Dowieść, że dla każdych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - y|}{4000}.$$

Rozwiązanie:

Skorzystamy ze wzoru skróconego mnożenia

$$\begin{aligned} a^{16} - b^{16} &= (a^8 - b^8) \cdot (a^8 + b^8) = (a^4 - b^4) \cdot (a^4 + b^4) \cdot (a^8 + b^8) = \\ &= (a^2 - b^2) \cdot (a^2 + b^2) \cdot (a^4 + b^4) \cdot (a^8 + b^8) = (a - b) \cdot (a + b) \cdot (a^2 + b^2) \cdot (a^4 + b^4) \cdot (a^8 + b^8), \end{aligned}$$

który przy założeniu $a + b \neq 0$ można zapisać w postaci

$$a - b = \frac{a^{16} - b^{16}}{(a + b) \cdot (a^2 + b^2) \cdot (a^4 + b^4) \cdot (a^8 + b^8)}.$$

Przyjmując $a = \sqrt[16]{x^4 + 10^{16}}$ oraz $b = \sqrt[16]{y^4 + 10^{16}}$, zauważamy, że $a + b > 0$ i przekształcamy lewą stronę dowodzonej nierówności:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \sqrt[16]{x^4 + 10^{16}} - \sqrt[16]{y^4 + 10^{16}} \right| = \\ &= \left| \frac{(x^4 + 10^{16}) - (y^4 + 10^{16})}{\left(\sqrt[16]{x^4 + 10^{16}} + \sqrt[16]{y^4 + 10^{16}} \right) \cdot \left(\sqrt[8]{x^4 + 10^{16}} + \sqrt[8]{y^4 + 10^{16}} \right) \cdot \left(\sqrt[4]{x^4 + 10^{16}} + \sqrt[4]{y^4 + 10^{16}} \right)} \right| = \\ &= \frac{|x^4 - y^4|}{\left(\sqrt[16]{x^4 + 10^{16}} + \sqrt[16]{y^4 + 10^{16}} \right) \cdot \left(\sqrt[8]{x^4 + 10^{16}} + \sqrt[8]{y^4 + 10^{16}} \right) \cdot \left(\sqrt[4]{x^4 + 10^{16}} + \sqrt[4]{y^4 + 10^{16}} \right)} = \\ &= \frac{|x - y| \cdot |x + y| \cdot (x^2 + y^2)}{\left(\sqrt[16]{x^4 + 10^{16}} + \sqrt[16]{y^4 + 10^{16}} \right) \cdot \left(\sqrt[8]{x^4 + 10^{16}} + \sqrt[8]{y^4 + 10^{16}} \right) \cdot \left(\sqrt[4]{x^4 + 10^{16}} + \sqrt[4]{y^4 + 10^{16}} \right)} = \\ &= \frac{|x - y| \cdot |x + y| \cdot (x^2 + y^2)}{\left(\sqrt[16]{x^4 + 10^{16}} + \sqrt[16]{y^4 + 10^{16}} \right) \cdot \left(\sqrt[8]{x^4 + 10^{16}} + \sqrt[8]{y^4 + 10^{16}} \right) \cdot \left(\sqrt[4]{x^4 + 10^{16}} + \sqrt[4]{y^4 + 10^{16}} \right)}. \end{aligned}$$

Korzystając z nierówności trójkąta i wykorzystując równość $|x| = \sqrt{x^4}$ otrzymujemy:

$$|x + y| \leq |x| + |y| = \sqrt[4]{x^4} + \sqrt[4]{y^4} < \sqrt[4]{x^4 + 10^{16}} + \sqrt[4]{y^4 + 10^{16}},$$

skąd

$$\frac{|x + y|}{\sqrt[4]{x^4 + 10^{16}} + \sqrt[4]{y^4 + 10^{16}}} < 1.$$

Analogicznie

$$x^2 + y^2 = \sqrt{x^4} + \sqrt{y^4} < \sqrt{x^4 + 10^{16}} + \sqrt{y^4 + 10^{16}},$$

skąd

$$\frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^4 + 10^{16}} + \sqrt{y^4 + 10^{16}}} < 1.$$

Ponadto zauważamy, że

$$\frac{1}{\sqrt[16]{x^4 + 10^{16}} + \sqrt[16]{y^4 + 10^{16}}} \leq \frac{1}{\sqrt[16]{0 + 10^{16}} + \sqrt[16]{0 + 10^{16}}} = \frac{1}{10 + 10} = \frac{1}{20}.$$

Analogicznie

$$\frac{1}{\sqrt[8]{x^4 + 10^{16}} + \sqrt[8]{y^4 + 10^{16}}} \leq \frac{1}{\sqrt[8]{0 + 10^{16}} + \sqrt[8]{0 + 10^{16}}} = \frac{1}{100 + 100} = \frac{1}{200}.$$

Wykorzystanie tych nierówności pozwala dokończyć oszacowania:

$$\begin{aligned} & \frac{|x - y| \cdot |x + y| \cdot (x^2 + y^2)}{\left(\sqrt[16]{x^4 + 10^{16}} + \sqrt[16]{y^4 + 10^{16}}\right) \cdot \left(\sqrt[8]{x^4 + 10^{16}} + \sqrt[8]{y^4 + 10^{16}}\right) \cdot \left(\sqrt[4]{x^4 + 10^{16}} + \sqrt[4]{y^4 + 10^{16}}\right)} \\ & \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{x^4 + 10^{16}} + \sqrt{y^4 + 10^{16}}\right)} = |x - y| \cdot \frac{1}{\sqrt[16]{x^4 + 10^{16}} + \sqrt[16]{y^4 + 10^{16}}} \\ & \cdot \frac{1}{\sqrt[8]{x^4 + 10^{16}} + \sqrt[8]{y^4 + 10^{16}}} \cdot \frac{|x + y|}{\sqrt[4]{x^4 + 10^{16}} + \sqrt[4]{y^4 + 10^{16}}} \cdot \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^4 + 10^{16}} + \sqrt{y^4 + 10^{16}}} \leq \\ & \leq |x - y| \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{200} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{|x - y|}{4000}. \end{aligned}$$