

KOŁOKWIUM nr 78, 20.12.2018, godz. 8:15–9:15**Zadanie 85. (10 punktów)**

Dobrać odpowiednią liczbę rzeczywistą k oraz liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej x zachodzą nierówności

$$C \cdot x^k \leq (4 \cdot \sqrt{16x+9} - 3 \cdot \sqrt{9x+16}) \cdot (\sqrt{x}+1) \leq 3C \cdot x^k.$$

Rozwiązanie:

Zastosowanie wzoru na różnicę kwadratów pozwala przekształcić szacowane wyrażenie w następujący sposób:

$$(4 \cdot \sqrt{16x+9} - 3 \cdot \sqrt{9x+16}) \cdot (\sqrt{x}+1) = \frac{175x \cdot (\sqrt{x}+1)}{4 \cdot \sqrt{16x+9} + 3 \cdot \sqrt{9x+16}}.$$

W przypadku, gdy $x \geq 1$, wykonujemy następujące szacowania:

$$\begin{aligned} 5x = \frac{175x \cdot \sqrt{x}}{35 \cdot \sqrt{x}} &= \frac{175x \cdot (\sqrt{x}+0)}{4 \cdot \sqrt{16x+9x} + 3 \cdot \sqrt{9x+16x}} \leq \frac{175x \cdot (\sqrt{x}+1)}{4 \cdot \sqrt{16x+9} + 3 \cdot \sqrt{9x+16}} \leq \\ &\leq \frac{175x \cdot (\sqrt{x}+\sqrt{x})}{4 \cdot \sqrt{16x+0} + 3 \cdot \sqrt{9x+0}} = \frac{350x \cdot \sqrt{x}}{25 \cdot \sqrt{x}} = 14x < 15x. \end{aligned}$$

Natomiast w przypadku, gdy $0 < x < 1$, oszacowania wyglądają następująco:

$$\begin{aligned} 5x = \frac{175x}{35} &= \frac{175x \cdot (0+1)}{4 \cdot \sqrt{16+9} + 3 \cdot \sqrt{9+16}} \leq \frac{175x \cdot (\sqrt{x}+1)}{4 \cdot \sqrt{16x+9} + 3 \cdot \sqrt{9x+16}} \leq \\ &\leq \frac{175x \cdot (1+1)}{4 \cdot \sqrt{0+9} + 3 \cdot \sqrt{0+16}} = \frac{350x}{24} < \frac{360x}{24} = 15x. \end{aligned}$$

Zatem dla dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej x zachodzą nierówności

$$5 \cdot x \leq (4 \cdot \sqrt{16x+9} - 3 \cdot \sqrt{9x+16}) \cdot (\sqrt{x}+1) \leq 15 \cdot x,$$

można więc przyjąć $k=1$ oraz $C=5$.

Zadanie 86. (15+5=20 punktów)

Niech funkcja $f : [0, 27] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$.

Zdanie Z: Dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [0, 27]$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq C \cdot |x - y|.$$

a) Dowieść, że **zdanie Z** jest prawdziwe dla $C = 4$.

Rozwiązanie:

Zauważmy najpierw, że nierówność między średnią geometryczną i arytmetyczną zastosowana do liczb $x^3, \sqrt{x^3 y^3}, \sqrt{x^3 y^3}$ daje

$$\sqrt[3]{x^3 \cdot \sqrt{x^3 y^3} \cdot \sqrt{x^3 y^3}} \leq \frac{x^3 + 2 \cdot \sqrt{x^3 y^3}}{3},$$

czyli

$$x^2 y \leq \frac{x^3}{3} + \frac{2 \cdot \sqrt{x^3 y^3}}{3}.$$

Analogicznie

$$x y^2 \leq \frac{y^3}{3} + \frac{2 \cdot \sqrt{x^3 y^3}}{3}.$$

Uzbrojeni w powyższe nierówności przekształcamy i szacujemy lewą stronę dowodzonej nierówności korzystając z warunku $0 \leq x, y \leq 27$ i zakładając $x + y > 0$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \sqrt[3]{x^4} - \sqrt[3]{y^4} \right| = \frac{|x^4 - y^4|}{\sqrt[3]{x^8} + \sqrt[3]{x^4 y^4} + \sqrt[3]{y^8}} = \frac{|x - y| \cdot (x^3 + x^2 y + x y^2 + y^3)}{\sqrt[3]{x^8} + \sqrt[3]{x^4 y^4} + \sqrt[3]{y^8}} \leq \\ &\leq \frac{|x - y| \cdot \left(x^3 + \frac{x^3}{3} + \frac{2 \cdot \sqrt{x^3 y^3}}{3} + \frac{y^3}{3} + \frac{2 \cdot \sqrt{x^3 y^3}}{3} + y^3 \right)}{\sqrt[3]{x^8} + \sqrt[3]{x^4 y^4} + \sqrt[3]{y^8}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{|x - y| \cdot (x^3 + \sqrt{x^3 y^3} + y^3)}{\sqrt[3]{x^8} + \sqrt[3]{x^4 y^4} + \sqrt[3]{y^8}} = \\ &= \frac{4}{3} \cdot \frac{|x - y| \cdot (\sqrt[3]{x^8} \cdot \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^4 y^4} \cdot \sqrt[3]{x y} + \sqrt[3]{y^8} \cdot \sqrt[3]{y})}{\sqrt[3]{x^8} + \sqrt[3]{x^4 y^4} + \sqrt[3]{y^8}} \leq \\ &\leq \frac{4}{3} \cdot \frac{|x - y| \cdot (\sqrt[3]{x^8} \cdot \sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{x^4 y^4} \cdot \sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{y^8} \cdot \sqrt[3]{27})}{\sqrt[3]{x^8} + \sqrt[3]{x^4 y^4} + \sqrt[3]{y^8}} = \\ &= 4 \cdot \frac{|x - y| \cdot (\sqrt[3]{x^8} + \sqrt[3]{x^4 y^4} + \sqrt[3]{y^8})}{\sqrt[3]{x^8} + \sqrt[3]{x^4 y^4} + \sqrt[3]{y^8}} = 4 \cdot |x - y|, \end{aligned}$$

co stanowi dowód danej w treści zadania nierówności dla $C = 4$ i dowolnych $x, y \in [0, 27]$.

b) Dowieść, że **zdanie Z** jest fałszywe dla $C = 3$.

Rozwiązanie:

Dla $x = 27$ oraz $y = 8$ mamy $|x - y| = 19$ oraz

$$|f(x) - f(y)| = 81 - 16 = 65 > 57 = 3 \cdot 19 = C \cdot |x - y|,$$

wskazaliśmy więc przykład liczb $x, y \in [0, 27]$, dla których dana w treści zadania nierówność jest fałszywa przy $C = 3$.

Nie jest więc prawdą, że ta nierówność zachodzi dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [0, 27]$.