

KOŁOKWIUM nr 79, 3.01.2019, godz. 8:15–9:00**Zadanie 87. (10 punktów)**

Dana jest taka funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że dla każdych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \sqrt[7]{(x - y)^8}.$$

Udowodnić, że funkcja f jest stała.

Rozwiązanie:

Dla dowolnych liczb rzeczywistych $x < y$ oraz dowolnej liczby naturalnej n oznaczmy

$$x_i = x + i \cdot \frac{y - x}{n}$$

dla $i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$. Odnotujmy, że przy tych oznaczeniach $x_0 = x$, $x_n = y$, a ponadto $x_i - x_{i-1} = (y - x)/n$. Tak więc punkty x_i dzielą przedział $[x, y]$ na n przedziałów równej długości.

Korzystając z nierówności trójkąta oraz z założeń o funkcji f otrzymujemy:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \right| \leq \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^n \sqrt[7]{(x_i - x_{i-1})^8} = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt[7]{(y-x)^8}}{\sqrt[7]{n^8}} = n \cdot \frac{\sqrt[7]{(y-x)^8}}{\sqrt[7]{n^8}} = \frac{\sqrt[7]{(y-x)^8}}{\sqrt[7]{n}}. \end{aligned}$$

Udowodniliśmy więc, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x < y$ oraz dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{\sqrt[7]{(y-x)^8}}{\sqrt[7]{n}},$$

co po ustaleniu x, y i przejściu z n do $+\infty$ daje

$$|f(x) - f(y)| \leq 0,$$

wobec czego

$$|f(x) - f(y)| = 0$$

i w konsekwencji f jest funkcją stałą.

Zadanie 88. (10 punktów)

Dana jest taka funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że dla każdych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - y|}{(x - y)^2 + 1}.$$

Udowodnić, że funkcja f jest stała.

Rozwiązanie:

Rozważmy liczby rzeczywiste $x < y$. Niech t będzie dowolną liczbą rzeczywistą dodatnią.

Korzystając z nierówności trójkąta oraz z założeń o funkcji f otrzymujemy:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |f(x) - f(y+t) + f(y+t) - f(y)| \leq |f(x) - f(y+t)| + |f(y+t) - f(y)| \leq \\ &\leq \frac{t+y-x}{(t+y-x)^2+1} + \frac{t}{t^2+1} < \frac{t+y-x}{(t+y-x)^2} + \frac{t}{t^2} = \frac{1}{t+y-x} + \frac{1}{t} < \frac{1}{t} + \frac{1}{t} = \frac{2}{t}. \end{aligned}$$

Udowodniliśmy więc, że dla dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej t zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{2}{t},$$

co po przejściu z t do $+\infty$ przy ustalonych x, y daje

$$|f(x) - f(y)| \leq 0,$$

wobec czego

$$|f(x) - f(y)| = 0$$

i w konsekwencji f jest funkcją stałą.