

KOŁOKWIUM nr 7, 10.12.2018, godz. 14:15–15:00

Zadanie 12. (12 punktów) W każdym z zadań **12.1–12.6** podaj granicę (lub granicę niewłaściwą) ciągu. Liczby wymierne podaj w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

Za każdą poprawną odpowiedź otrzymasz **2 punkty**.

$$12.1. \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + 3 + 9 + 27 + \dots + 3^k + \dots + 9^n}{1 + 9 + 81 + 729 + \dots + 9^k + \dots + 9^n} = \mathbf{4/3}$$

$$12.2. \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + 5 + 25 + 125 + \dots + 5^k + \dots + 25^n}{1 + 25 + 625 + \dots + 25^k + \dots + 25^n} = \mathbf{6/5}$$

$$12.3. \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + 3 + 9 + 27 + \dots + 3^k + \dots + 27^n}{1 + 27 + 729 + \dots + 27^k + \dots + 27^n} = \mathbf{13/9}$$

$$12.4. \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + 5 + 25 + 125 + \dots + 5^k + \dots + 125^n}{1 + 125 + 15625 + \dots + 125^k + \dots + 125^n} = \mathbf{31/25}$$

$$12.5. \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^k + \dots + 16^n}{1 + 16 + 256 + \dots + 16^k + \dots + 16^n} = \mathbf{15/8}$$

$$12.6. \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + 3 + 9 + 27 + \dots + 3^k + \dots + 81^n}{1 + 81 + 6561 + \dots + 81^k + \dots + 81^n} = \mathbf{40/27}$$

Zadanie 13. (10 punktów)

Wyznaczyć wszystkie zbieżne szeregi **geometryczne** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich** spełniające warunki

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 5 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = 2.$$

Rozwiązanie:

Sposób I

Niech q będzie ilorazem szeregu geometrycznego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Wówczas dodatniość wyrazów i zbieżność szeregu pociągają nierówności $a_1 > 0$ oraz $0 < q < 1$, a wyrazy szeregu wyrażają się wzorem $a_n = a_1 q^{n-1}$. Ponadto ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-q}.$$

Ponieważ wyrazy szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$$

wyrażają się wzorem

$$a_{2n} = a_1 q \cdot (q^2)^{n-1},$$

szereg ten jest szeregiem geometrycznym o pierwszym wyrazie $a_1 q$ i ilorazie q^2 . Wobec tego

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = \frac{a_1 q}{1-q^2}.$$

Zatem warunki podane w treści zadania przyjmują postać

$$\frac{a_1}{1-q} = 5 \quad \text{oraz} \quad \frac{a_1 q}{1-q^2} = 2,$$

co po przekształceniu prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} a_1 &= 5 \cdot (1-q) \\ a_1 q &= 2 \cdot (1-q) \cdot (1+q) \end{cases}$$

Podstawienie $a_1 = 5 \cdot (1-q)$ do drugiego równania daje

$$5 \cdot (1-q) \cdot q = 2 \cdot (1-q) \cdot (1+q),$$

skąd po uwzględnieniu $q \neq 1$ i podzieleniu obustronnie przez $1-q$ otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned} 5q &= 2q + 2, \\ q &= 2/3, \quad a_1 = 5/3. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Jedynym szeregiem geometrycznym spełniającym warunki zadania jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \cdot 2^{n-1}}{3^n}.$$

Sposób II

Z warunków zadania wynika, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = 5 - 2 = 3,$$

a ponieważ $a_{2n} = a_{2n-1}q$, gdzie q jest ilorazem szeregu geometrycznego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = q \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}, \quad \text{czyli} \quad 2 = q \cdot 3.$$

Stąd $q = 2/3$ i w konsekwencji

$$5 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{a_1}{1-\frac{2}{3}} = 3a_1,$$

co prowadzi do $a_1 = 5/3$.

Odpowiedź: Jedynym szeregiem geometrycznym spełniającym warunki zadania jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \cdot 2^{n-1}}{3^n}.$$