

KOŁOKWIUM nr 80, 10.01.2019, godz. 8:15–9:00**Zadanie 89. (10 punktów)**

Funkcja $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ jest określona wzorem $f(x) = 1 + x + 2\sqrt{x}$. Funkcja g jest złożeniem 100 egzemplarzy funkcji f : $g(x) = f(f(f(\dots f(f(x))\dots)))$. Obliczyć $g'(100)$.

Rozwiązanie:

Niech f_n będzie złożeniem n egzemplarzy funkcji f . Udowodnimy przez indukcję, że

$$f_n(x) = (\sqrt{x} + n)^2.$$

1° Zauważmy, że

$$f_1(x) = f(x) = (\sqrt{x} + 1)^2,$$

zatem dowodzone twierdzenie jest prawdziwe dla $n = 1$.

2° Zakładając

$$f_n(x) = (\sqrt{x} + n)^2,$$

otrzymujemy

$$f_{n+1}(x) = f(f_n(x)) = f\left((\sqrt{x} + n)^2\right) = \left(\sqrt{(\sqrt{x} + n)^2} + 1\right)^2 = (\sqrt{x} + n + 1)^2,$$

co kończy zasadniczą część dowodu indukcyjnego.

Ponieważ $g = f_{100}$,

$$g'(x) = \frac{d}{dx} (\sqrt{x} + 100)^2 = 2 \cdot (\sqrt{x} + 100) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} + 100}{\sqrt{x}} = 1 + \frac{100}{\sqrt{x}},$$

skąd

$$g'(100) = 11.$$

Zadanie 90. (10 punktów)

Na potrzeby tego zadania funkcję $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nazwiemy **trefloróżniczkowalną** w punkcie x_0 , jeżeli istnieje granica

$$f^{\clubsuit}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h},$$

którą to granicę nazywać będziemy **treflopochodną** funkcji f w punkcie x_0 .

a) (5 punktów) Dowieść, że jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0 , to jest **trefloróżniczkowalna** w x_0 i wyrazić $f^{\clubsuit}(x_0)$ w zależności od $f'(x_0)$.

Rozwiązanie:

Korzystając z definicji *treflopochodnej* i założenia różniczkowalności funkcji f w x_0 otrzymujemy

$$\begin{aligned} f^{\clubsuit}(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} \right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} = f'(x_0) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - (-h))}{(-h)} = \\ &= f'(x_0) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) + f'(x_0) = 2 \cdot f'(x_0). \end{aligned}$$

b) (5 punktów) Podać przykład funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ **trefloróżniczkowalnej** w zerze, która nie jest różniczkowalna w zerze. Uzasadnić poprawność podanego przykładu.

Rozwiązanie:

Jeżeli f jest funkcją parzystą, to

$$f^{\clubsuit}(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0,$$

a zatem f jest **trefloróżniczkowalna** w zerze.

Dla otrzymania poprawnego przykładu wystarczy rozważyć funkcję parzystą f , która jest nieciągła w zerze (a więc nieróżniczkowalna w zerze), np.:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \neq 0, \\ 1 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

Inne przykłady: funkcja parzysta określona wzorem $f(x) = \sqrt{|x|}$ albo określona wzorem $f(x) = |x|$ jest ciągła w zerze, ale jest tam nieróżniczkowalna (co łatwo sprawdzamy bezpośrednio z definicji).