

KOŁOKWIUM nr 81, 17.01.2019, godz. 8:15–10:00**Zadanie 91. (10 punktów)**

W każdym z zadań **91.1-91.3** funkcja $g_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją odwrotną do funkcji $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określonej podanym wzorem. W każdym z tych zadań podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartości pochodnej funkcji g_i w trzech podanych punktach.

Za każdą poprawną odpowiedź otrzymasz **1 punkt**.

Za komplet poprawnych odpowiedzi otrzymasz **dziesiąty punkt**.

91.1. $f_1(x) = x^3 + 2x$

$$g'_1(3) = 1/5$$

$$g'_1(12) = 1/14$$

$$g'_1(72) = 1/50$$

91.2. $f_2(x) = x^3 + 4x$

$$g'_2(5) = 1/7$$

$$g'_2(16) = 1/16$$

$$g'_2(80) = 1/52$$

91.3. $f_3(x) = 2x^3 + x$

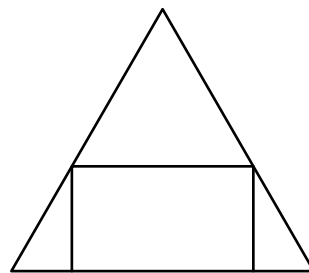
$$g'_3(3) = 1/7$$

$$g'_3(18) = 1/25$$

$$g'_3(57) = 1/55$$

Zadanie 92. (10 punktów)

W stożku o objętości 1 chcemy umieścić walec w taki sposób, że jedna z podstaw walca leży w płaszczyźnie podstawy stożka, a obwód drugiej podstawy walca leży na powierzchni bocznej stożka. Rysunek obok przedstawia widok z boku, ewentualnie przekrój płaszczyzną zawierającą wspólną oś obrotu stożka i walca. Jaką największą objętość może mieć walec?



Rozwiązanie:

Niech r będzie promieniem podstawy stożka, a h jego wysokością. Jeżeli walec ma wysokość $x \in (0, h)$, to jego podstawa ma promień $r \cdot \left(1 - \frac{x}{h}\right)$, co ustalamy na podstawie prostych rozważań geometrycznych.

Wówczas objętość walca jest równa

$$V(x) = \pi \cdot x \cdot r^2 \cdot \left(1 - \frac{x}{h}\right)^2.$$

Zauważmy, że

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} V(x) = \lim_{x \rightarrow h^-} V(x) = 0,$$

a ponadto

$$\begin{aligned} V'(x) &= \pi \cdot r^2 \cdot \left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 - \frac{2\pi \cdot x \cdot r^2}{h} \cdot \left(1 - \frac{x}{h}\right) = \left(1 - \frac{x}{h} - \frac{2x}{h}\right) \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \left(1 - \frac{x}{h}\right) = \\ &= \left(1 - \frac{3x}{h}\right) \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \left(1 - \frac{x}{h}\right). \end{aligned}$$

Wobec tego $V'(x) = 0$ dla $x = h/3$, co prowadzi do maksymalnej objętości walca równej

$$V(h/3) = \pi \cdot \frac{h}{3} \cdot r^2 \cdot \left(1 - \frac{h/3}{h}\right)^2 = \frac{\pi \cdot h \cdot r^2}{3} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{9}.$$

W powyższych rachunkach skorzystaliśmy z podanego w treści zadania założenia, że stożek ma objętość $1 = \pi r^2 h/3$.

Odpowiedź: Największa możliwa objętość walca wynosi $4/9$.

Zadanie 93. (10 punktów)

Udowodnić, że równanie

$$x^{2019} \cdot (x-2)^{2018} = 1$$

ma co najmniej trzy rozwiązania.

Rozwiązanie:

Niech

$$f(x) = x^{2019} \cdot (x-2)^{2018}.$$

Zauważmy, że $f(1) = 1$ oraz

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2019 \cdot x^{2018} \cdot (x-2)^{2018} + 2018 \cdot x^{2019} \cdot (x-2)^{2017} = \\ &= (2019(x-2) + 2018x) \cdot x^{2018} \cdot (x-2)^{2017}, \end{aligned}$$

skąd $f'(1) = 1$.

Stąd wynika, że funkcja f przyjmuje wartości większe od 1 w prawostronnym otoczeniu jedynki, a ponieważ $f(2) = 0$, na mocy własności Darboux funkcji ciągłych wnioskujemy, że f przyjmuje wartość 1 w przedziale $(1, 2)$.

Pozostaje zauważyć, że $f(3) > 1$, wobec czego funkcja f przyjmuje wartość 1 w przedziale $(2, 3)$.

Wobec tego f przyjmuje wartość 1 co najmniej trzykrotnie: w punkcie 1, w przedziale $(1, 2)$ i w przedziale $(2, 3)$.

Zadanie 94. (10 punktów)

Wyznaczyć największą wartość funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określonej wzorem

$$f(x) = 5 \sin x - \sin 5x.$$

Rozwiązanie:

Ponieważ funkcja f jest okresowa z okresem 2π i różniczkowalna, wystarczy porównać wartości funkcji w miejscach zerowych pochodnej znajdujących się w przedziale $[0, 2\pi)$.

Skoro

$$f'(x) = 5 \cos x - 5 \cos 5x,$$

równanie $f'(x) = 0$ jest równoważne równaniu

$$\cos x = \cos 5x.$$

Ponieważ równość

$$\cos x = \cos y$$

jest równoważna istnieniu liczby całkowitej k i znaku $\pm$ takich, że

$$y = 2k\pi \pm x,$$

otrzymujemy równanie

$$5x = 2k\pi \pm x,$$

czyli

$$(5 \mp 1) \cdot x = 2k\pi.$$

Wobec tego

$$x = \frac{k\pi}{2} \quad \text{lub} \quad x = \frac{k\pi}{3},$$

co w połączeniu z warunkiem $x \in [0, 2\pi)$ prowadzi do ośmiu miejsc zerowych pochodnej w jednym okresie.

Sprawdzając wartości funkcji f w tych ośmiu punktach otrzymujemy:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, & f(\pi/3) &= 3\sqrt{3}, & f(\pi/2) &= 4, & f(2\pi/3) &= 3\sqrt{3}, \\ f(\pi) &= 0, & f(4\pi/3) &= -3\sqrt{3}, & f(3\pi/2) &= -4, & f(5\pi/3) &= -3\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Największa wartość funkcji f jest równa $3\sqrt{3}$.