

KOŁOKWIUM nr 8, 17.12.2018, godz. 14:15–15:00**Zadanie 14. (10 punktów)**

Niech funkcja $f: [8, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [8, \infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - y|}{12}.$$

Rozwiązanie:

Przekształcamy zgodnie ze wzorem na różnicę sześcianów lewą stronę dowodzonej nierówności, a następnie szacujemy korzystając z nierówności $x, y \geq 8$:

$$|f(x) - f(y)| = \left| \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} \right| = \frac{|x - y|}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}} \leq \frac{|x - y|}{3 \cdot \sqrt[3]{8^2}} = \frac{|x - y|}{12},$$

co stanowi dowód danej w treści zadania nierówności dla dowolnych $x, y \geq 8$.

Zadanie 15. (10 punktów)

Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem $f(x) = \sqrt[4]{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1}$.

Uwaga: Treść zadania jest poprawna - pod pierwiastkiem niczego nie brakuje - ma być tak jak jest napisane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1 = x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 2x)^2 + 2x^2 + 1 > 0,$$

skąd wynika, że funkcja f jest określona na całej prostej rzeczywistej. Ponieważ funkcja f jest ciągła, nie ma ona asymptot pionowych.

Przystępujemy więc do próby wyznaczenia asymptot ukośnych/poziomych.

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[4]{\frac{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1}{x^4}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[4]{1 + \frac{4}{x} + \frac{6}{x^2} + \frac{1}{x^4}} = 1. \\ b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[4]{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1} - x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1) - x^4}{(\sqrt[4]{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1} + x) \cdot (\sqrt{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1} + x^2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 + 6x^2 + 1}{(\sqrt[4]{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1} + x) \cdot (\sqrt{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1} + x^2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 + 6x^{-1} + x^{-3}}{(\sqrt[4]{1 + 4x^{-1} + 6x^{-2} + x^{-4}} + 1) \cdot (\sqrt{1 + 4x^{-1} + 6x^{-2} + x^{-4}} + 1)} = \\ &= \frac{4}{(1+1) \cdot (1+1)} = 1. \end{aligned}$$

W powyższych rachunkach skorzystaliśmy ze wzoru

$$s - t = \frac{s^4 - t^4}{(s+t) \cdot (s^2 + t^2)}.$$

Wyznaczając asymptotę przy $x \rightarrow -\infty$ pamiętamy, że w tym przypadku należy przyjąć założenie $x < 0$, a w konsekwencji $x = -|x| = -\sqrt[4]{x^4}$.

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[4]{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[4]{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1}}{-\sqrt[4]{x^4}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt[4]{\frac{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1}{x^4}} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt[4]{1 + \frac{4}{x} + \frac{6}{x^2} + \frac{1}{x^4}} \right) = -1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[4]{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1} + x \right) = \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1) - x^4}{\left(\sqrt[4]{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1} - x \right) \cdot \left(\sqrt[4]{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1} + x^2 \right)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^3 + 6x^2 + 1}{\left(\sqrt[4]{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1} - x \right) \cdot \left(\sqrt[4]{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1} + x^2 \right)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 + 6x^{-1} + x^{-3}}{\left(\frac{\sqrt[4]{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1}}{x} - 1 \right) \cdot \left(\frac{\sqrt[4]{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1}}{x^2} + 1 \right)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 + 6x^{-1} + x^{-3}}{\left(\frac{\sqrt[4]{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1}}{-\sqrt[4]{x^4}} - 1 \right) \cdot \left(\frac{\sqrt[4]{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1}}{\sqrt[4]{x^4}} + 1 \right)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 + 6x^{-1} + x^{-3}}{\left(-\sqrt[4]{1 + 4x^{-1} + 6x^{-2} + x^{-4}} - 1 \right) \cdot \left(\sqrt[4]{1 + 4x^{-1} + 6x^{-2} + x^{-4}} + 1 \right)} = \\
&= \frac{4}{(-1 - 1) \cdot (1 + 1)} = -1.
\end{aligned}$$

Tym razem skorzystaliśmy ze wzoru

$$s + t = \frac{s^4 - t^4}{(s - t) \cdot (s^2 + t^2)}$$

przy $s = \sqrt[4]{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1} > 0$ i $t = x < 0$, a więc w sytuacji, gdy $s - t$ jest dodatnie, a w konsekwencji różne od zera.

Odpowiedź: Dana funkcja ma w $+\infty$ asymptotę ukośną o równaniu $y = x + 1$, natomiast w $-\infty$ asymptotę ukośną o równaniu $y = -x - 1$.