

KOŁOKWIUM nr 9, 7.01.2019, godz. 14:15–15:00

Zadanie 16. (10 punktów) Korzystając z **definicji** pochodnej wyprowadzić wzór na pochodną funkcji f określonej wzorem $f(x) = \sqrt[4]{x^8 + 1}$.

Uwaga: Nie wolno używać reguły de l'Hospitala lub w inny sposób omijać bezpośrednie korzystanie z definicji pochodnej.

Rozwiązanie:

Stosując definicję pochodnej oraz pięciokrotnie wzór na różnicę kwadratów otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x} \frac{\sqrt[4]{y^8 + 1} - \sqrt[4]{x^8 + 1}}{y - x} = \\
 &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{y^8 - x^8}{\left(\sqrt{y^8 + 1} + \sqrt{x^8 + 1}\right) \cdot \left(\sqrt[4]{y^8 + 1} + \sqrt[4]{x^8 + 1}\right) \cdot (y - x)} = \\
 &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{(y - x) \cdot (y + x) \cdot (x^2 + y^2) \cdot (x^4 + y^4)}{\left(\sqrt{y^8 + 1} + \sqrt{x^8 + 1}\right) \cdot \left(\sqrt[4]{y^8 + 1} + \sqrt[4]{x^8 + 1}\right) \cdot (y - x)} = \\
 &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{(y + x) \cdot (x^2 + y^2) \cdot (x^4 + y^4)}{\left(\sqrt{y^8 + 1} + \sqrt{x^8 + 1}\right) \cdot \left(\sqrt[4]{y^8 + 1} + \sqrt[4]{x^8 + 1}\right)} = \\
 &= \frac{(x + x) \cdot (x^2 + x^2) \cdot (x^4 + x^4)}{\left(\sqrt{x^8 + 1} + \sqrt{x^8 + 1}\right) \cdot \left(\sqrt[4]{x^8 + 1} + \sqrt[4]{x^8 + 1}\right)} = \\
 &= \frac{2x \cdot 2x^2 \cdot 2x^4}{2\sqrt{x^8 + 1} \cdot 2\sqrt[4]{x^8 + 1}} = \frac{2x^7}{(x^8 + 1)^{3/4}}.
 \end{aligned}$$

Zadanie 17. (10 punktów)

Na potrzeby tego zadania prostą nazwiemy *fajną*, jeśli jest styczna do obydwu następujących parabol: do paraboli o równaniu $y = x^2 + 2$ oraz do paraboli o równaniu $y = -x^2$. Wyznaczyć równania wszystkich *fajnych* prostych.

Rozwiązanie:

Niech $(a, a^2 + 2)$ i $(b, -b^2)$ będą punktami styczności szukanej prostej odpowiednio do wykresów funkcji określonych wzorami $f(x) = x^2 + 2$ i $g(x) = -x^2$. Ponieważ

$$f'(x) = 2x \quad \text{oraz} \quad g'(x) = -2x,$$

równanie szukanej prostej ma jednocześnie postać

$$y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a) \quad \text{oraz} \quad y = g'(b) \cdot (x - b) + g(b),$$

czyli

$$y = 2a \cdot x - a^2 + 2 \quad \text{oraz} \quad y = -2b \cdot x + b^2.$$

Aby obydwa powyższe równania definiowały tę samą prostą, muszą zachodzić równości

$$2a = -2b \quad \text{oraz} \quad -a^2 + 2 = b^2.$$

Z pierwszego równania otrzymujemy $b = -a$, co po wstawieniu do drugiego równania prowadzi do $a = \pm 1$ oraz $b = \mp 1$.

W konsekwencji istnieją dwie *fajne* proste, a ich równania to

$$y = 2x + 1 \quad \text{oraz} \quad y = -2x + 1.$$