

Przypomnij sobie ze szkoły: Wzory skróconego mnożenia, dwumian Newtona.

Zadania do samodzielnego rozwiązania.

Pomoc w rozwiązywaniu tych zadań można uzyskać na ćwiczeniach grupy 6

3,4.10.2018 — nie będą omawiane na ćwiczeniach grup 2-5.

1. Wiadomo, że wśród następujących sześciu liczb

$$3465^2 - 2, \quad 3465^2 - 4, \quad 3465^2 - 8, \quad 3465^2 - 16, \quad 3465^2 - 32, \quad 3465^2 - 64$$

trzy są pierwsze, a trzy złożone. Które z podanych liczb są pierwsze?

2. Uzupełnić wzory skróconego mnożenia. Kropki występujące po lewej stronie równości zastąpić pojedynczym znakiem.

a) $(x+2)^2 = x^2 + \dots$

b) $a^3 + b^3 = (a+b) \cdot \dots$

c) $a^3 - b^3 = (a-b) \cdot \dots$

d) $a^3 \dots b^3 = (a^2 + ab + b^2) \cdot \dots$

e) $a^4 \dots b^4 = (a+b) \cdot \dots$

f) $a^4 \dots b^4 = (a-b) \cdot \dots$

g) $a^5 \dots b^5 = (a+b) \cdot \dots$

h) $a^5 \dots b^5 = (a-b) \cdot \dots$

i) $(a+b)^3 = a^3 + 3 \dots$

j) $(a-b)^4 = a^4 - \dots$

k) $(a-b)^5 = a^5 - \dots$

l) $a^n - b^n = (a-b) \cdot \dots$

m) $a^n + b^n = (a+b) \cdot \dots$ - dla których n ?

n) $a^n - b^n = (a+b) \cdot \dots$ - dla których n ?

o) $a^n + b^n = (a^2 + b^2) \cdot \dots$ - dla których n ?

p) $a^n - b^n = (a^2 + b^2) \cdot \dots$ - dla których n ?

3. Dla podanej liczby wskazać jej **nieparzysty** dzielnik pierwszy mniejszy od 100.

a) $2^{21} - 1$, ;

b) $3^{21} - 1$, ;

c) $3^{51} - 2^{51}$, ;

d) $3^{51} + 1$, ;

4. Dla podanej liczby k podać taką liczbę naturalną $n \geq k$, że $\binom{n}{k+1} = k \cdot \binom{n}{k}$

a) $k = 2$, $n = \dots$;

b) $k = 3$, $n = \dots$;

c) $k = 4$, $n = \dots$;

d) $k = 5$, $n = \dots$;

5. Wiedząc, że $\binom{14}{4} = 1001$, $\binom{14}{5} = 2002$, $\binom{14}{6} = 3003$, podać wartość współczynnika dwumianowego

a) $\binom{15}{5} = \dots$; b) $\binom{15}{6} = \dots$; c) $\binom{16}{6} = \dots$; d) $\binom{15}{10} = \dots$.

6. Dla podanych liczb a oraz k wskazać taką liczbę naturalną n , aby zachodziła równość

$$(a^{a^k})^{a^{a^k}} = a^{a^n}.$$

- a) $a = 5$, $k = 2$, $n = \dots$; b) $a = 3$, $k = 3$, $n = \dots$; c) $a = 2$, $k = 5$, $n = \dots$; d) $a = 3$, $k = 4$, $n = \dots$.

7. Wskazać taką liczbę C , że dla dowolnych liczb całkowitych nieujemnych n i k , gdzie $n \geq k + 2$, prawdziwa jest równość

$$\binom{n}{k} + C \cdot \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+2} = \binom{n+2}{k+2}.$$

8. Uporządkować rosnąco następujące liczby:

$$\binom{100}{7}, \binom{100}{27}, \binom{100}{47}, \binom{100}{57}, \binom{100}{77}, \binom{100}{97}.$$

9. Czy równość $2 \cdot \binom{n}{k} = \binom{n}{k+1}$ jest prawdziwa dla

- a) $n = 8$, $k = 2$ b) $n = 10$, $k = 3$ c) $n = 15$, $k = 4$ d) $n = 17$, $k = 5$

10. Dowieść, że dla dowolnych liczb całkowitych nieujemnych a, b, c zachodzi równość

$$\binom{a+b+c}{a} \binom{b+c}{b} = \binom{a+b+c}{b} \binom{a+c}{a}.$$

Oznaczenia:

$$\sum_{i=m}^n a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3} + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$\prod_{i=m}^n a_i = a_m \cdot a_{m+1} \cdot a_{m+2} \cdot a_{m+3} \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$$

Obliczyć wartości wyrażeń:

11. $\sum_{i=3}^5 i^2$ 12. $\sum_{i=-99}^{100} i^3$ 13. $\sum_{i=-10}^{10} 7$ 14. $\prod_{i=1}^5 i$ 15. $\prod_{i=-2015}^{2015} i^{2015}$

16. Czy prawdziwa jest równość

- a) $\prod_{n=2}^{15} n = 15!$ b) $\prod_{n=5}^{24} n = 23!$ c) $\prod_{n=-1}^{37} n = -37!$ d) $\sum_{n=-28}^{29} n = 29$