Zadania do samodzielnego rozwiązania.
Pomoc w rozwiązaniu tych zadań można uzyskać na ćwiczeniach grupy 6 10,11.10.2018 — nie będą omawiane na ćwiczeniach grup 2-5.

17. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$1+2\cdot 3+3\cdot 3^2+4\cdot 3^3+5\cdot 3^4+\ldots+n\cdot 3^{n-1}=\frac{2n-1}{4}\cdot 3^n+\frac{1}{4}\ .$$

18. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n\geqslant 2$ zachodzi równość

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}=1-\frac{1}{n}\ .$$

19. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n\geqslant 2$ zachodzi równość

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{60}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n\cdot(n+1)}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2n(n+1)}\ .$$

20. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej $n\geqslant 2$ zachodzi równość

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\ldots+\frac{1}{n^2-1}=\frac{(n-1)(3n+2)}{4n(n+1)}\ .$$

21. Wyznaczyć zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x, dla których prawdziwa jest podana implikacja:
a) $x>0\Rightarrow x+1>2$ **b)** $x<1\Rightarrow x^2>0$ **c)** $x<1\Rightarrow x^2<0$ **d)** $x^5>32\Rightarrow x^6>64$
e) $x^6>64\Rightarrow x^7>128$ **f)** $x^5<32\Rightarrow x^6<64$ **g)** $x^6<64\Rightarrow x^7<128$

22. Udowodnić, że dla każdej nieparzystej liczby naturalnej n, liczba n^4-1 jest podzielna przez 16.

23. Udowodnić, że dla każdej nieparzystej liczby naturalnej n, liczba $n^{2^{2018}}-1$ jest podzielna przez 2^{2020}.
UWAGA: Potęgowanie wykonujemy "od góry": $a^{b^c}=a^{(b^c)}$.

24. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$(2^{2^0}+1)\cdot(2^{2^1}+1)\cdot(2^{2^2}+1)\cdot(2^{2^3}+1)\cdot(2^{2^4}+1)\cdot\ldots\cdot(2^{2^n}+1)=2^{2^{n+1}}-1\ .$$

25. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n\geqslant 2$ zachodzi równość

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{21}+\frac{3}{91}+\frac{4}{273}+\frac{5}{651}+\frac{6}{1333}+\ldots+\frac{n-1}{(n-1)^4+(n-1)^2+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot(n^2-n+1)}\ .$$

26. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\sqrt[n]{25}\cdot\binom{5n}{n}\cdot\binom{4n}{2n}<\sqrt[n]{27}\cdot\binom{5n}{2n}\cdot\binom{3n}{n}\ .$$

27. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$2^{16}\cdot n<2^n+2^{20}\ .$$