

Zadania do samodzielnego rozwiązania.

Pomoc w rozwiązaniu tych zadań można uzyskać na ćwiczeniach grupy 6

9,10.01.2019 — nie będą omawiane na ćwiczeniach grup 2-5.

W następującym zadaniu wykorzystać twierdzenie Lagrange'a oraz własność Darboux funkcji ciągłych (przypomnienie: funkcja różniczkowalna jest ciągła).

593. Funkcje $f_1, f_2, f_3, \dots, f_{12}$ są określone i różniczkowalne na całej prostej rzeczywistej, a ich pochodne są ciągłe. Ponadto

$$f_1(3) = 1, \quad f_1(5) = 2,$$

$$f_2(0) = 3, \quad f_2(4) = -1,$$

$$f_3(-5) = 0, \quad f_3(15) = 10,$$

$$f_4(1) = 2, \quad \forall_x f'_4(x) \neq 1,$$

$$f_5(0) = 0, \quad f_5(2) = 10, \quad \forall_x f'_5(x) \neq 2,$$

$$f_6(0) = 7, \quad \forall_x f'_6(x) > 2,$$

$$f_7(3) = 5, \quad \forall_x f'_7(x) \geq -1,$$

$$f_8(-2) = 0, \quad f_8(0) = 10, \quad f_8(3) = 4,$$

$$f_9(-1) = 0, \quad f_9(1) = 100, \quad f'_9(3) = 40,$$

$$f_{10}(1) = -5, \quad f_{10}(11) = 5, \quad \forall_x 0 < f'_{10}(x) < 2,$$

$$f_{11}(0) = 0, \quad f_{11}(100) = 0, \quad \forall_x -1 < f'_{11}(x) < 2,$$

$$f_{12}(-100) = -100, \quad f_{12}(100) = 100, \quad \forall_x -100 < f'_{12}(x) < 100.$$

A) Dowieść, że dla co najmniej trzech funkcji f_i zachodzi warunek

$$\forall_x f'_i(x) \neq 0$$

B) Dowieść, że dla co najmniej dwóch funkcji f_i zachodzi warunek

$$\exists_c f'_i(c) = -1$$

C) Dowieść, że dla co najmniej siedmiu funkcji f_i zachodzi warunek

$$f_i(0) \neq 1$$

D) Dowieść, że dla co najmniej czterech funkcji f_i zachodzi warunek

$$f_i(99) > 0$$

E) Dowieść, że dla co najmniej dwóch funkcji f_i zachodzi warunek

$$\exists_c f'_i(c) = 5$$

F) Dowieść, że dla co najmniej jednej funkcji f_i zachodzi warunek

$$\exists_c f'_i(c) = 44$$

G) Dowieść, że dla co najmniej trzech funkcji f_i zachodzi warunek

$$\exists_c f'_i(c) = \frac{1}{2}$$

H) Dowieść, że dla co najmniej siedmiu funkcji f_i zachodzi warunek

$$f_i(1) \neq 8$$

I) Dowieść, że dla co najmniej czterech funkcji f_i zachodzi warunek

$$\exists_c f_i(c) = 13$$

J) Dowieść, że dla co najmniej jednej funkcji f_i zachodzi warunek

$$\exists_{c \neq d} f_i(c) = f_i(d) = 7$$

K) Dowieść, że dla co najmniej dziewięciu funkcji f_i zachodzi warunek

$$\exists_{c,d} f_i(c) = f'_i(d)$$

594. Niech $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{dla } x \neq 2 \\ x^2 & \text{dla } x = 2 \end{cases}$

Obliczyć $f'(2)$.

Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji określonej podanym wzorem w podanym przedziale

595. $x^2 + 2x + 21$, $[-2, 7]$

596. $|x^2 - 1| + 3x$, $[-2, 2]$

597. $|x + 1| + x^2$, $[-10, 10]$

598. $|10x - 1| + x^3$, $[0, 1]$

599. $x^2 + x - \sqrt{x^2 + x + \frac{1}{4}}$, $\left[-\frac{2}{3}, \frac{1}{4}\right]$

600. $-3x + (x^2 - 6x + 9)^{3/2}$, $[1, 5]$

Obliczyć granice

601. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$

602. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$

603. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x + x^2 - 2}{x \sin x - x^2}$

604. $\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-x}$

605. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$

606. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$

607. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{e^x} - e}{x}$

608. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$

609. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}$

610. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{(x - 1)^2}$

611. $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln \ln x}{x - e}$

612. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{e^x}$