

Kolokwium nr 7: poniedziałek 10.12.2018, godz. 14:15-15:00, materiał zad. 1–414.

Kolokwium nr 8: poniedziałek 17.12.2018, godz. 14:15-15:00, materiał zad. 1–520.

Poziom standardowy (z myślą o ocenie co najwyżej dobrej)

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami.

8. Szeregi liczbowe.

Zadania do omówienia na drugiej godzinie ćwiczeń 3.12.2018
oraz **PIERWSZEJ GODZINIE 6.12.2018** (grupy 2–5).

406. Obliczyć $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{7^k}$, a następnie znaleźć $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

407. Obliczyć sumę szeregu

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6^n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-6)^n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8^n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{8^n}$

Wskazówka: W kolejnych pięciu zadaniach szukać przykładu szeregu geometrycznego.

408. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2.$$

409. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 5 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} = 2.$$

410. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że dla dowolnej liczby naturalnej k zachodzi równość

$$a_k = 2 \cdot \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n.$$

411. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{1}{4}.$$

412. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{1}{2} \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4 = \frac{1}{5}.$$

413. Dowieść, że $6 < \sum_{n=1}^{2047} \frac{1}{n} < 11$.

414. Dowieść, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$ jest zbieżny, a jego suma jest mniejsza od 2.

9. Funkcje – ciągłość, granica.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach 6¹,10,13.12.2018 (grupy 2–5).

Nie wszystkie zadania z serii zadań podobnego typu zostaną omówione. Studenci powinni umieć wskazać zadania, które sprawiły najwięcej kłopotu.

470. Wskazać odpowiednie liczby wymierne dodatnie C oraz δ , a następnie udowodnić, że

$$\forall_{x \in (27-\delta, 27+\delta)} \left| \sqrt[3]{x} - C \right| < \frac{1}{1000}.$$

Do podanych f , x_0 i ε dobrać takie δ , aby $\forall_{x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)} |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

471. $f(x) = 2x$, $x_0 = 5$, $\varepsilon = 1/10$ **472.** $f(x) = 1/x$, $x_0 = 4$, $\varepsilon = 1/100$

473. $f(x) = x^2$, $x_0 = 1$, $\varepsilon = 1/50$ **474.** $f(x) = x^3$, $x_0 = 0$, $\varepsilon = 1/1000$

475. $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 30$, $\varepsilon = 1/10$ **476.** $f(x) = x^4$, $x_0 = 10$, $\varepsilon = 10^{-10}$

Dla podanej funkcji f dobrać C i udowodnić oszacowanie

$$|f(x) - f(x_0)| < C \cdot \delta$$

prawdziwe dla dowolnego $\delta > 0$ oraz dowolnych $x, x_0 \in D_f$ spełniających warunek $|x - x_0| < \delta$.

477. $f(x) = \sqrt{x}$, $D_f = [1, +\infty)$ **478.** $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $D_f = \mathbb{R}$

479. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$, $D_f = \mathbb{R}$ **480.** $f(x) = x^3$, $D_f = [-10, 5]$

Do podanych f , x_0 i ε dobrać takie $k \in \mathbb{N}$ (dowolne, nie musi być najmniejsze), aby przy $\delta = 10^{-k}$ spełniony był warunek $\forall_{x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)} |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

481. $f(x) = x^{10}$, $x_0 = 2$, $\varepsilon = 1/10$ **482.** $f(x) = x^{100}$, $x_0 = 5$, $\varepsilon = 10^{-10}$

483. $f(x) = x^{1000}$, $x_0 = 10$, $\varepsilon = 10^{100}$ (tak, do **plus** setnej)

484. $f(x) = x^{1/10}$, $x_0 = 1111$, $\varepsilon = 10^{-5}$

485. Niech funkcja $f : [25, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = \sqrt{x}$.

Zdanie Z: Dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [25, \infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq C \cdot |x - y|.$$

a) Dowieść, że **zdanie Z** jest prawdziwe dla $C = 1/10$.

b) Dowieść, że **zdanie Z** jest fałszywe dla $C = 1/12$.

486. Dla funkcji $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ określonej podanym wzorem wskazać odpowiednie liczby rzeczywiste dodatnie x, y i udowodnić nierówność $|f(x) - f(y)| > 100 \cdot |x - y|$.

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = \frac{1}{x}$

¹Na drugiej godzinie ćwiczeń.

487. Niech funkcja $f: [4, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.
Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [4, \infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - y|}{16}.$$

488. Funkcja f spełnia warunki

$$f(3 - x) = f(x), \quad f(6 - x) = f(x)$$

dla dowolnej liczby rzeczywistej x . Dowieść, że funkcja f jest okresowa i parzysta.

489. Dla których wartości parametrów a, b funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{dla } x < 1 \\ x^2 & \text{dla } 1 \leq x < 2 \\ ax - b & \text{dla } 2 \leq x \end{cases}$$

jest ciągła? Naszkicować wykres funkcji f dla każdej pary parametrów (a, b) , dla których funkcja f jest ciągła.

490. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = a \cdot \{x\}^3 + b \cdot \{x\}^2 + c \cdot \{x\} + d,$$

gdzie $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x .

Jakie warunki muszą spełniać liczby a, b, c, d , aby funkcja f była ciągła?

491. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = a \cdot \{2x\} + b \cdot \{2x + 1\} + c \cdot \{x\} + d \cdot \left\{x + \frac{1}{2}\right\},$$

gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y .

Jakie warunki muszą spełniać liczby a, b, c, d , aby funkcja f była ciągła?

492. Podać wszystkie sześć par parametrów (a, b) , dla których funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 6 & \text{dla } x < a \\ |x^2 - 10x + 15| & \text{dla } a \leq x < b \\ 6 & \text{dla } b \leq x \end{cases}$$

jest ciągła.

493. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = a \cdot \{x\} + b \cdot 3^{\{x\}},$$

gdzie $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x , a w drugim składniku wyrażenie $\{x\}$ występuje **w wykładniku potęgi** o podstawie 3.

Wyznaczyć wszystkie pary parametrów rzeczywistych (a, b) , dla których funkcja f określona powyższym wzorem jest ciągła.

494. Dowieść, że równanie $\cos x = x$ ma co najmniej jedno rozwiązanie.

495. Dowieść, że równanie $\cos x = x^2$ ma co najmniej dwa rozwiązania.

496. Dowieść, że równanie $x^{2017} + x = 2017$ ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem

$$\mathbf{497.} \quad f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} + \frac{x}{2} \quad \mathbf{498.} \quad f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^2} \quad \mathbf{499.} \quad f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 + 5x + 4} + |x|$$

Twierdzenie o trzech funkcjach: Jeżeli funkcje f, g, h są określone w otoczeniu punktu $x_0 \in [-\infty, +\infty]$ (mogą nie być określone w samym x_0), a przy tym

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

dla x bliskich x_0 , to z istnienia i równości granic funkcji f oraz h w punkcie x_0 wynika

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x).$$

To samo stosuje się do granic jednostronnych.

Obliczyć granice

$$\mathbf{500.} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x^{1000})}{\sqrt{x}} \quad \mathbf{501.} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \left\{ 1/x^{1000} \right\} \text{ (uwaga: część ułamkowa)} \quad \mathbf{502.} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$$

Korzystając ze zbieżności (granica funkcji)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e \quad (\spadesuit)$$

obliczyć

$$\begin{aligned} \mathbf{503.} \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{\sqrt{x^2+x}} & \mathbf{504.} \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{\sqrt{7x^2+5x+1}} & \mathbf{505.} \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{x+1}}{(x+1)^x} \\ \mathbf{506.} \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{\sqrt{x}} & \mathbf{507.} \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^x \\ \mathbf{508.} \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{x \cdot f(x)}, \text{ gdzie } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \end{aligned}$$

Wyznaczyć wartości granic ciągów (wolno korzystać ze wzoru $(\spadesuit)$ powyżej).

$$\begin{aligned} \mathbf{509.} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right) & \mathbf{510.} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+2016} \right) & \mathbf{511.} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{2016n+1} \right) \\ \mathbf{512.} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{2016} & \mathbf{513.} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+2016} \right)^{2016} & \mathbf{514.} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{2016n+1} \right)^{2016} \\ \mathbf{515.} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n & \mathbf{516.} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{2016n} & \mathbf{517.} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n/2016} \\ \mathbf{518.} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^{2016}} & \mathbf{519.} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2016}{n} \right)^n & \mathbf{520.} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2016}{n} \right)^n \end{aligned}$$