

587. Potrzebna jest kadź w kształcie prostopadłościanu o podstawie kwadratowej, otwarta u góry, której dno i boki wykonane są z tego samego materiału. Kadź ma mieć z góry ustaloną pojemność. Jaki powinien być stosunek wysokości kadzi do krawędzi podstawy, aby do jej wykonania potrzeba było jak najmniej materiału?

588. W beczce pełnej wody robimy gwoździem dziurę. Z dziury tryska poziomo strumień wody. Na jakiej wysokości należy zrobić dziurę, aby strumień wody tryskał jak najdalej? Jak daleko tryska wtedy strumień? Jak zmieni się odpowiedź na Księżycu, gdzie grawitacja jest 6 razy słabsza? Jakie założenie o kształcie beczki przyjmujemy w rozwiązaniu?

Przypomnienie dla tych, co nie uważali na lekcji fizyki: prędkość wytrysku wody jest równa prędkości ciała, które spadło swobodnie od poziomu lustra wody do poziomemu dziurze (bilans energii). Ruch wody jest złożeniem dwóch ruchów — jednostajnego w poziomie i jednostajnie przyspieszonego w pionie.

589. Rozważamy graniastosłupy prawidłowe o podstawie sześciokątnej i ustalonej objętości. Rozstrzygnąć, który z nich ma najmniejsze pole powierzchni całkowitej. W odpowiedzi podać iloraz wysokości do krawędzi podstawy.

590. Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x.$$

591. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A , że funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x} - 2x^2 - 2x - 1}{x^3} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A .

592. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A , że funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1 + \ln(1-x)}{x^3} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A .

589. Rozważamy graniastosłupy prawidłowe o podstawie sześciokątnej i ustalonej objętości. Rozstrzygnąć, który z nich ma najmniejsze pole powierzchni całkowitej. W odpowiedzi podać iloraz wysokości do krawędzi podstawy.

Rozwiązanie:

Niech V będzie ustaloną objętością, a a krawędzią podstawy graniastosłupa. Pole powierzchni podstawy jest wówczas równe $3\sqrt{3} \cdot a^2/2$, co daje wysokość równą

$$h = \frac{2V}{3\sqrt{3} \cdot a^2}.$$

Pole powierzchni całkowitej jest wówczas równe

$$P(a) = 3\sqrt{3} \cdot a^2 + 6 \cdot ah = 3\sqrt{3} \cdot a^2 + 6 \cdot a \cdot \frac{2V}{3\sqrt{3} \cdot a^2} = 3\sqrt{3} \cdot a^2 + \frac{4V}{\sqrt{3} \cdot a}.$$

Zauważmy, że

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} P(a) = \lim_{a \rightarrow +\infty} P(a) = +\infty.$$

Ponadto

$$P'(a) = 6\sqrt{3} \cdot a - \frac{4V}{\sqrt{3} \cdot a^2},$$

skąd $P'(a) = 0$ dla

$$a = \sqrt[3]{\frac{2V}{9}}$$

i dla takiej właśnie długości krawędzi podstawy pole powierzchni całkowitej graniastosłupa osiąga minimum. Wówczas

$$\frac{h}{a} = \frac{2V}{3\sqrt{3} \cdot a^3} = \frac{2V}{3\sqrt{3} \cdot 2V/9} = \sqrt{3}.$$

Odpowiedź: Najmniejsze pole powierzchni ma graniastosłup, w którym stosunek wysokości do krawędzi podstawy jest równy $\sqrt{3}$.

591. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A , że funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x} - 2x^2 - 2x - 1}{x^3} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A .

Rozwiązanie:

Korzystając z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{e^{2h} - 2h^2 - 2h - 1}{h^3} - A}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{2h} - 2h^2 - 2h - 1 - Ah^3}{h^4}.$$

Przy $h \rightarrow 0$ w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2e^{2h} - 4h - 2 - 3Ah^2}{4h^3}.$$

Przy $h \rightarrow 0$ otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc po raz drugi zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4e^{2h} - 4 - 6Ah}{12h^2}.$$

Przy $h \rightarrow 0$ otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc po raz trzeci zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8e^{2h} - 6A}{24h}.$$

Przy $h \rightarrow 0$ otrzymujemy iloraz $\frac{8-6A}{0}$, co ma postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$ dla $A = 4/3$. Wówczas możemy po raz czwarty zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{16e^{2h}}{24} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}.$$

Odpowiedź: Funkcja f jest różniczkowalna dla $A = 4/3$ i wówczas $f'(0) = 2/3$.

592. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A , że funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1 + \ln(1-x)}{x^3} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A .

Rozwiązanie:

Korzystając z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{e^h - 1 + \ln(1-h)}{h^3} - A}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1 + \ln(1-h) - Ah^3}{h^4}.$$

Przy $h \rightarrow 0$ w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - \frac{1}{1-h} - 3Ah^2}{4h^3}.$$

Przy $h \rightarrow 0$ otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc po raz drugi zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - \frac{1}{(1-h)^2} - 6Ah}{12h^2}.$$

Przy $h \rightarrow 0$ otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc po raz trzeci zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - \frac{2}{(1-h)^3} - 6A}{24h}.$$

Przy $h \rightarrow 0$ otrzymujemy iloraz $\frac{-1-6A}{0}$, co ma postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$ dla $A = -1/6$. Wówczas możemy po raz czwarty zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - \frac{6}{(1-h)^4}}{24} = -\frac{5}{24}.$$

Odpowiedź: Funkcja f jest różniczkowalna dla $A = -1/6$ i wówczas $f'(0) = -5/24$.