

Rozwiązania niektórych zadań z listy 21.

626. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = x + |x^2 - 6|$$

na przedziale $[-4, 3]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$|x^2 - 6| = \begin{cases} x^2 - 6 & \text{dla } x \in (-\infty, -\sqrt{6}] \cup [\sqrt{6}, +\infty) \\ -x^2 + 6 & \text{dla } x \in (-\sqrt{6}, \sqrt{6}) \end{cases}$$

a zatem wzór na funkcję f możemy zapisać w postaci

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 - 6 & \text{dla } x \in [-4, -\sqrt{6}] \cup [\sqrt{6}, 3] \\ x - x^2 + 6 & \text{dla } x \in (-\sqrt{6}, \sqrt{6}) \end{cases}$$

W konsekwencji pochodna funkcji f wewnątrz przedziału $[-4, 3]$ jest dana wzorem

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + 2x & \text{dla } x \in (-4, -\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6}, 3) \\ 1 - 2x & \text{dla } x \in (-\sqrt{6}, \sqrt{6}) \end{cases}$$

W punktach $-\sqrt{6}$ i $\sqrt{6}$ pochodna może nie istnieć, jednak nie ma potrzeby rozstrzygać jej istnienia – wystarczy dołączyć te punkty do listy punktów, w których obliczymy wartość funkcji f .

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:

1° W przypadku $x \in (-4, -\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6}, 3)$ równanie $f'(x) = 0$ sprowadza się do równania $1 + 2x = 0$, co ma rozwiązanie $x = -1/2$, które jednak nie należy do rozważanego zbioru $(-4, -\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6}, 3)$.

2° W przypadku $x \in (-\sqrt{6}, \sqrt{6})$ równanie $f'(x) = 0$ sprowadza się do $1 - 2x = 0$, co ma rozwiązanie $x = 1/2$, które należy do rozważanego przedziału $(-\sqrt{6}, \sqrt{6})$.

Porównamy wartości funkcji f w pięciu punktach:

- końce przedziału: -4 i 3 ,
- miejsce zerowe pochodnej: $1/2$,
- punkty, w których podejrzewamy, że pochodna nie istnieje: $-\sqrt{6}$ i $\sqrt{6}$.

$$\begin{aligned} f(-4) &= 6, \\ f(-\sqrt{6}) &= -\sqrt{6}, \\ f(1/2) &= 6,25, \\ f(\sqrt{6}) &= \sqrt{6}, \\ f(3) &= 6. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Dana funkcja na podanym przedziale osiąga wartość najmniejszą równą $-\sqrt{6}$ w punkcie $-\sqrt{6}$, a wartość największą równą $6,25 = 25/4$ w punkcie $1/2$.

627. Wyznaczyć punkty, w których funkcja f zdefiniowana wzorem

$$f(x) = \frac{9}{x} - \frac{81}{8x^2} + \ln x$$

osiąga najmniejszą i największą wartość na przedziale $[4, 5]$.

Rozwiązanie:

Różniczkujemy funkcję f i korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy:

$$f'(x) = -\frac{9}{x^2} + \frac{81}{4x^3} + \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{9}{x^2} + \frac{81}{4x^3} = \frac{4x^2 - 36x + 81}{4x^3} = \frac{(2x-9)^2}{4x^3} \geq 0,$$

przy czym w ostatniej nierówności równość zachodzi tylko dla $x = 9/2$. Ponieważ w interesującym nas przedziale pochodna funkcji f jest dodatnia za wyjątkiem jednego punktu, w którym ma wartość zero, funkcja f jest w tym przedziale rosnąca.

Odpowiedź: Funkcja f osiąga wartość najmniejszą na początku przedziału, czyli w punkcie 4, a największą na końcu, czyli w punkcie 5.

Uwaga: Na ogół w tego typu zadaniu nie badalibyśmy znaku pochodnej, a jedynie porównalibyśmy wartości funkcji na końcach przedziału i w miejscach zerowania się pochodnej. Jednak w tym wypadku jest to praktycznie niewykonalne bez użycia kalkulatora, mamy bowiem:

$$\begin{aligned} f(4) &= \frac{207}{128} + \ln 4 \approx 3,00348, \\ f(9/2) &= \frac{3}{2} + \ln(9/2) \approx 3,00408, \\ f(5) &= \frac{279}{200} + \ln 5 \approx 3,00444. \end{aligned}$$

628. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = x + |x^2 - x - 12|$$

na przedziale $[-5, 5]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$x^2 - x - 12 = (x - 4) \cdot (x + 3).$$

Stąd

$$|x^2 - x - 12| = \begin{cases} x^2 - x - 12 & \text{dla } x \in (-\infty, -3] \cup [4, +\infty) \\ -x^2 + x + 12 & \text{dla } x \in (-3, 4) \end{cases}$$

a zatem wzór na funkcję f możemy zapisać w postaci

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 12 & \text{dla } x \in [-5, -3] \cup [4, 5] \\ -x^2 + 2x + 12 & \text{dla } x \in (-3, 4) \end{cases}$$

W konsekwencji pochodna funkcji f wewnątrz przedziału $[-5, 5]$ jest dana wzorem

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{dla } x \in (-5, -3) \cup (4, 5) \\ -2x + 2 & \text{dla } x \in (-3, 4) \end{cases}$$

W punktach -3 i 4 pochodna może nie istnieć, jednak nie ma potrzeby rozstrzygać jej istnienia – wystarczy dołączyć te punkty do listy punktów, w których obliczymy wartość funkcji f .

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:

1° W przypadku $x \in (-5, -3) \cup (4, 5)$ równanie $f'(x) = 0$ sprowadza się do $2x = 0$, co ma rozwiązanie $x = 0$, które jednak nie należy do rozważanego zbioru $(-5, -3) \cup (4, 5)$.

2° W przypadku $x \in (-3, 4)$ równanie $f'(x) = 0$ sprowadza się do $-2x + 2 = 0$, co ma rozwiązanie $x = 1$, które należy do rozważanego przedziału $(-3, 4)$.

Porównamy wartości funkcji f w pięciu punktach:

- końce przedziału: -5 i 5 ,
- miejsce zerowe pochodnej: 1 ,
- punkty, w których podejrzewamy, że pochodna nie istnieje: -3 i 4 .

$$f(-5) = 13,$$

$$f(-3) = -3,$$

$$f(1) = 13,$$

$$f(4) = 4,$$

$$f(5) = 13.$$

Odpowiedź: Dana funkcja na podanym przedziale osiąga wartość najmniejszą równą -3 w punkcie -3 , a wartość największą równą 13 w punktach -5 , 1 i 5 .

629. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = x^2 - \sqrt{9x^2 + 6x + 1}$$

na przedziale $[-2, 2]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$f(x) = x^2 - \sqrt{9x^2 + 6x + 1} = x^2 - \sqrt{(3x + 1)^2} = x^2 - |3x + 1|$$

a zatem wzór na funkcję f możemy zapisać w postaci

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x - 1 & \text{dla } x \in [-1/3, 2] \\ x^2 + 3x + 1 & \text{dla } x \in [-2, -1/3) \end{cases}$$

W konsekwencji pochodna funkcji f wewnątrz przedziału $[-2, 2]$ jest dana wzorem

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{dla } x \in (-1/3, 2) \\ 2x + 3 & \text{dla } x \in (-2, -1/3) \end{cases}$$

W punkcie $-1/3$ pochodna może nie istnieć, jednak nie ma potrzeby rozstrzygać jej istnienia – wystarczy dołączyć ten punkt do listy punktów, w których obliczymy wartość funkcji f .

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:

1° W przypadku $x \in (-1/3, 2)$ równanie $f'(x) = 0$ sprowadza się do $2x - 3 = 0$, co ma rozwiązanie $x = 3/2$, które należy do rozważanego przedziału $(-1/3, 2)$.

2° W przypadku $x \in (-2, -1/3)$ równanie $f'(x) = 0$ sprowadza się do $2x + 3 = 0$, co ma rozwiązanie $x = -3/2$, które należy do rozważanego przedziału $(-2, -1/3)$.

Porównamy wartości funkcji f w pięciu punktach:

- końce przedziału: -2 i 2 ,
- miejsca zerowe pochodnej: $-3/2$ i $3/2$,
- punkt, w którym podejrzewamy, że pochodna nie istnieje: $-1/3$.

$$\begin{aligned} f(-2) &= -1, \\ f(-3/2) &= -5/4, \\ f(-1/3) &= 1/9, \\ f(3/2) &= -13/4, \\ f(2) &= -3 = -12/4. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Dana funkcja na podanym przedziale osiąga wartość najmniejszą równą $-13/4$ w punkcie $3/2$, a wartość największą równą $1/9$ w punkcie $-1/3$.

630. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = \sqrt{16x^2 - 16x + 4} - x^2$$

na przedziale $[-1, 3]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$f(x) = \sqrt{16x^2 - 16x + 4} - x^2 = \sqrt{(4x - 2)^2} - x^2 = |4x - 2| - x^2$$

a zatem wzór na funkcję f możemy zapisać w postaci

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 2 - x^2 & \text{dla } x \in [1/2, 3] \\ -4x + 2 - x^2 & \text{dla } x \in [-1, 1/2) \end{cases}$$

W konsekwencji pochodna funkcji f wewnątrz przedziału $[-1, 3]$ jest dana wzorem

$$f'(x) = \begin{cases} 4 - 2x & \text{dla } x \in (1/2, 3) \\ -4 - 2x & \text{dla } x \in (-1, 1/2) \end{cases}$$

W punkcie $1/2$ pochodna może nie istnieć, jednak nie ma potrzeby rozstrzygać jej istnienia – wystarczy dołączyć ten punkt do listy punktów, w których obliczymy wartość funkcji f .

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:

1° W przypadku $x \in (1/2, 3)$ równanie $f'(x) = 0$ sprowadza się do $4 - 2x = 0$, co ma rozwiązanie $x = 2$, które należy do rozważanego przedziału $(1/2, 3)$.

2° W przypadku $x \in (-1, 1/2)$ równanie $f'(x) = 0$ sprowadza się do $-4 - 2x = 0$, co ma rozwiązanie $x = -2$, które **nie należy** do rozważanego przedziału $(-1, 1/2)$.

Porównamy wartości funkcji f w czterech punktach:

- końce przedziału: -1 i 3 ,
- miejsce zerowe pochodnej: 2 ,
- punkt, w którym podejrzewamy, że pochodna nie istnieje: $1/2$.

$$f(-1) = 5,$$

$$f(1/2) = -1/4,$$

$$f(2) = 2,$$

$$f(3) = 1.$$

Odpowiedź: Dana funkcja na podanym przedziale osiąga wartość najmniejszą równą $-1/4$ w punkcie $1/2$, a wartość największą równą 5 w punkcie -1 .