

Kolokwium nr 12: poniedziałek 28.01.2019, godz. 14:15-15:00, materiał zad. 1–693.

13. Pochodne wyższych rzędów (c.d.).

Zadania do omówienia na ćwiczeniach 21,24.01.2019 (grupy 2–5).

Pomoc w rozwiązywaniu tych zadań można też uzyskać na ćwiczeniach grupy 6 w dniach 23,24.01.2019.

Wyznaczyć punkty przegięcia i przedziały wypukłości/wklęsłości funkcji zmiennej x danej wzorem:

659. $x^3 + 2x^2 + 3x + 4$

660. $x^8 - x^2 + 7x - 15$

661. e^{-x^2}

662. $\sin^4 x$

663. $\sqrt{x} - \ln x$

664. $x^4 + \sqrt[4]{x}$

Bez korzystania z kalkulatora wstawić w miejsce kropek znak nierówności " $<$ " albo " $>$ " :

665. $2 \cdot \arctg 34 \dots\dots\dots \arctg 33 + \arctg 35$

666. $\sqrt[4]{32} \dots\dots\dots \sqrt[4]{1,9} + \sqrt[4]{2,1}$

667. $2 \cdot \sin 47^\circ \dots\dots\dots \sin 46^\circ + \sin 48^\circ$

668. $512 \dots\dots\dots 3,99^{3,99} + 4,01^{4,01}$

Zbadać, czy funkcja f określona podanym wzorem ma ekstremum (jeśli tak, to jakie: minimum czy maksimum lokalne) w podanym punkcie x_0 .

669. $f(x) = e^x - x - \frac{x^2}{2}, \quad x_0 = 0$

670. $f(x) = e^x - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}, \quad x_0 = 0$

671. $f(x) = \sin x - \ln(1+x), \quad x_0 = 0$

672. $f(x) = 2\cos x + \ln(1+x^2), \quad x_0 = 0$

673. $f(x) = \arctg x - x, \quad x_0 = 0$

674. $f(x) = \arctg x - \frac{x}{2}, \quad x_0 = 1$

675. Uzupełnić znakami " $<$ " lub " $>$ ":

LEMAT: Niech a będzie liczbą rzeczywistą i niech $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będą takimi funkcjami różniczkowalnymi, że $f(a) = g(a)$.

Jeżeli dla każdego $x > a$ zachodzi nierówność $f'(x) < g'(x)$, to dla dowolnego $x > a$ prawdziwa jest nierówność $f(x) \dots\dots g(x)$.

Jeżeli dla każdego $x < a$ zachodzi nierówność $f'(x) < g'(x)$, to dla dowolnego $x < a$ prawdziwa jest nierówność $f(x) \dots\dots g(x)$.

676. Uzupełnić znakami " $<$ " lub " $>$ ":

LEMAT: Niech a będzie liczbą rzeczywistą i niech $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będą takimi funkcjami dwukrotnie różniczkowalnymi, że $f(a) = g(a)$ oraz $f'(a) = g'(a)$.

Jeżeli dla każdego $x > a$ zachodzi nierówność $f''(x) < g''(x)$, to dla dowolnego $x > a$ prawdziwa jest nierówność $f(x) \dots\dots g(x)$.

Jeżeli dla każdego $x < a$ zachodzi nierówność $f''(x) < g''(x)$, to dla dowolnego $x < a$ prawdziwa jest nierówność $f(x) \dots\dots g(x)$.

677. Uzupełnić znakami " $<$ " lub " $>$ ":

LEMAT: Niech $a < b$ będą liczbami rzeczywistymi i niech $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będą takimi funkcjami dwukrotnie różniczkowalnymi, że $f(a) = g(a)$ oraz $f(b) = g(b)$.

Jeżeli dla każdego $x \in (a, b)$ zachodzi nierówność $f''(x) < g''(x)$, to dla dowolnego $x \in (a, b)$ prawdziwa jest nierówność $f(x) \dots g(x)$.

Jeżeli dla każdego $x \in (a, b)$ zachodzi nierówność $f''(x) > g''(x)$, to dla dowolnego $x \in (a, b)$ prawdziwa jest nierówność $f(x) \dots g(x)$.

Wstawić znak " $<$ " albo " $>$ " i udowodnić powstałą nierówność:

678. $\ln(x+1) \dots x$ dla $x > 0$ **679.** $\ln(x+1) \dots x - \frac{x^2}{2}$ dla $x > 0$

680. $\ln(x+1) \dots x$ dla $-1 < x < 0$ **681.** $\ln(x+1) \dots x - \frac{x^2}{2}$ dla $-1 < x < 0$

682. $\ln(x+1) \dots x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ dla $x > 0$

683. $\ln(x+1) \dots x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ dla $-1 < x < 0$

684. $\ln(x+1) \dots \frac{x}{2}$ dla $0 < x < 2$

685. $\arctg x \dots x$ dla $x > 0$ **686.** $\arctg x \dots \frac{\pi x}{4}$ dla $0 < x < 1$

687. $\sin x \dots x$ dla $x > 0$ **688.** $\cos x \dots 1 - \frac{x^2}{2}$ dla $x > 0$

689. $\sin x \dots x - \frac{x^3}{6}$ dla $x > 0$ **690.** $\cos x \dots 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ dla $x > 0$

691. $\sin x \dots \frac{2x}{\pi}$ dla $0 < x < \frac{\pi}{2}$ **692.** $\sin x \dots \frac{3x}{\pi}$ dla $0 < x < \frac{\pi}{6}$

693. Funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ma w przedziale $D_f = [a, b]$ ciągłe pochodne do rzędu trzeciego włącznie (na końcach przedziału ma pochodne jednostronne równe odpowiednim granicom jednostronnym odpowiednich pochodnych).

a) Czy funkcja f ma w punkcie a ekstremum (jeśli tak, to jakie: minimum czy maksimum lokalne), jeżeli:

(i) $f'(a^+) > 0$

(ii) $f'(a^+) < 0$

(iii) $f'(a^+) = 0$, $f''(a^+) > 0$

(iv) $f'(a^+) = 0$, $f''(a^+) < 0$

(v) $f'(a^+) = f''(a^+) = 0$, $f'''(a^+) > 0$

(vi) $f'(a^+) = f''(a^+) = 0$, $f'''(a^+) < 0$

b) Czy funkcja f ma w punkcie b ekstremum (jeśli tak, to jakie: minimum czy maksimum lokalne), jeżeli:

(vii) $f'(b^-) > 0$

(viii) $f'(b^-) < 0$

(ix) $f'(b^-) = 0$, $f''(b^-) > 0$

(x) $f'(b^-) = 0$, $f''(b^-) < 0$

(xi) $f'(b^-) = f''(b^-) = 0$, $f'''(b^-) > 0$

(xii) $f'(b^-) = f''(b^-) = 0$, $f'''(b^-) < 0$