

Zadania do omówienia na ćwiczeniach 28,31.01.2019 (grupy 2–5).

**Pomoc w rozwiązaniu tych zadań można też uzyskać
na ćwiczeniach grupy 6 w dniach 30,31.01.2019.**

Wzór Taylora (c.d.)

694. Dobrać takie liczby rzeczywiste a, b, c , aby funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \sqrt{1+x} + ax + bx^2 + cx^3$$

spełniała warunek

$$f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0.$$

Czy funkcja f ma w zerze (lokalne) ekstremum? Jeśli tak, to jakie?

695. Dobrać taką liczbę rzeczywistą a , aby funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \ln(1+x) + e^{-x} + ax^3$$

spełniała warunek

$$f'''(0) = 0.$$

Czy funkcja f ma w zerze (lokalne) ekstremum? Jeśli tak, to jakie?

696. Dobrać taką liczbę rzeczywistą a , aby funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \ln(1+x) + a \cdot e^x$$

spełniała warunek

$$f^{(5)}(0) = 0.$$

697. Funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna tyle razy, ile sobie zapagniemy, a ponadto

$$f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0.$$

Dowieść, że funkcja g określona wzorem $g(x) = f(x^2)$ spełnia warunek

$$g^{(k)}(0) = 0 \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

gdzie n jest możliwie największe. Pokazać na przykładzie, że nie musi być $g^{(n+1)}(0) = 0$.

698. Funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna nieskończenie wiele razy. Dla których liczb naturalnych k funkcja g określona wzorem $g(x) = f(x^3)$ musi spełniać warunek $g^{(k)}(0) = 0$?

699. Dobrać taką liczbę rzeczywistą a , aby funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \sin(x^3) + a \cdot \sin(x^5)$$

spełniała warunek

$$f^{(15)}(0) = 0.$$

Można pomachać rękami, tzn. nie trzeba precyzyjnie wszystkiego uzasadniać, wystarczy dojść do poprawnej odpowiedzi zakładając, że tamto czy siamto można zaniedbać.

Wybiórcza powtórka – zadania z egzaminu z roku 2018.

11. W każdym z zadań **11.1-11.10** podaj w postaci uproszczonej kresy zbioru oraz określ, czy kresy należą do zbioru.

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty = \infty$.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ oznacza zbiór liczb naturalnych (całkowitych dodatnich).

11.1. $A = \{x^4 : x \in (-2, 1)\}$

11.2. $B = \{x^5 : x \in (-2, 1)\}$

11.3. $C = \left\{ \frac{1}{n^2 - 26} : n \in \mathbb{N} \right\}$

11.4. $D = \left\{ \frac{1}{n^3 - 26} : n \in \mathbb{N} \right\}$

11.5. $E = \{(2 - \sqrt{3})^n : n \in \mathbb{N}\}$

11.6. $F = \{(2 - \sqrt{5})^n : n \in \mathbb{N}\}$

11.7. $G = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 25n^2 \leq m^2 \leq 27n^2 \right\}$

11.8. $H = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 25n^3 \leq m^3 \leq 27n^3 \right\}$

11.9. $I = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 25^n \leq 3^m \leq 27^n \right\}$

11.10. $J = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 25^n \leq 5^m \leq 27^n \right\}$

12. Dowieść, że liczba $\log_{300} 3000$ jest niewymierna.

13. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{\sqrt{36n+28} - \sqrt{36n+13}}{\sqrt{25n+75} - \sqrt{25n+11}} \leq 2C.$$

14. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 4 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = 8.$$

15. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A , że funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{e^x - 1 - x} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A .

16. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n^2}}{(n+2)^2} + \frac{\sqrt{n^2+2}}{(n+2)^2+1} + \frac{\sqrt{n^2+4}}{(n+2)^2+2} + \frac{\sqrt{n^2+6}}{(n+2)^2+3} + \frac{\sqrt{n^2+8}}{(n+2)^2+4} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{\sqrt{n^2+2k}}{(n+2)^2+k} + \dots + \frac{\sqrt{(n+A)^2-6}}{(n+B)^2-3} + \frac{\sqrt{(n+A)^2-4}}{(n+B)^2-2} + \frac{\sqrt{(n+A)^2-2}}{(n+B)^2-1} + \frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+B)^2} \right)$$

dla tak dobranych liczb całkowitych $A > 0$ i $B > 2$, aby zadanie miało sens.

21. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = 2x + \sqrt{x^4 - 98x^2 + 7^4}$$

na przedziale $[-11, 9]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągnięte.

22. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\binom{2n}{n} \geq \frac{2^{2n-1}}{\sqrt{n}}.$$

23. Wyznaczyć taki wielomian piątego stopnia $W(x)$ o współczynnikach rzeczywistych, że funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 0 \\ W(x) & \text{dla } 0 < x < 1 \\ x & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$$

jest dwukrotnie różniczkowalna.

24. Dana jest funkcja $f: [-10, 10] \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \sqrt{10x^2 + 9000}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [-10, 10]$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|.$$

25. Niech funkcja $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x) = \ln x - \sqrt[3]{x}.$$

Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(89) + f(91) \quad \text{czy} \quad 2 \cdot f(90) ?$$

26. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+3)}.$$