

Kolokwium nr 1: poniedziałek 15.10.2018, godz. 14:15-15:00, materiał zad. 1–43.

Poziom standardowy (z myślą o ocenie co najwyżej dobrej)

1. Indukcja matematyczna. Dwumian Newtona.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach 8,11.10.2018 (grupy 2–5).

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami.

28. Dowieść, że dla każdego $n \geq 2$ zachodzi równość

$$\binom{2}{2} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \dots \cdot \binom{n}{2} = \frac{n \cdot [(n-1)!]^2}{2^{n-1}}.$$

29. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2.$$

30. Dowieść, że dla każdego $n \geq 2$ zachodzi równość

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \dots + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{3}.$$

31. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 4$ zachodzi równość

$$\binom{4}{4} + \binom{5}{4} + \binom{6}{4} + \dots + \binom{n}{4} = \binom{n+1}{5}.$$

32. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ zachodzi nierówność $\binom{2n}{n} < 4^n$.

Wskazówka: $(1+1)^{2n}$

33. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ zachodzi nierówność $\binom{2n}{n} < 2^{2n-1}$.

34. Liczby a_n, b_n są określone wzorami $a_1 = b_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + b_n$, $b_{n+1} = a_{n+1} + a_n$. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi równość $b_n^2 - 2a_n^2 = (-1)^n$.

35. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$16^n \cdot \binom{4n}{2n} < 27^n \cdot \binom{4n}{n}.$$

OSZUSTWO 36. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$30n < 2^n + 110. \quad (*)$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n = 1$ sprawdzamy bezpośrednio $30 < 2 + 110 = 112$.

2° Załóżmy, że $30n < 2^n + 110$. Udowodnimy nierówność

$30(n+1) < 2^{n+1} + 110$. Stosując założenie indukcyjne otrzymujemy ciąg nierówności:

$$30(n+1) = 30n + 30 < 2^n + 110 + 30 = 2^{n+1} + 110 + 30 - 2^n < 2^{n+1} + 110,$$

przy czym ostatnia nierówność zachodzi dla $n \geq 5$.

Zatem nierówność (*) została udowodniona dla $n \geq 5$.

Pozostaje sprawdzić, że

dla $n = 2$ mamy $60 < 4 + 110 = 114$,

dla $n = 3$ mamy $90 < 8 + 110 = 118$,

dla $n = 4$ mamy $120 < 16 + 110 = 126$.

Tym samym nierówność (*) jest udowodniona dla wszystkich liczb naturalnych n .

W szczególności wykazaliśmy, że dla $n = 6$ zachodzi nierówność $180 < 174$.

Gdzie tkwi błąd w powyższym rozumowaniu?

37. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $10n < 2^n + 25$.

38. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$100n \leq 2^n + 572.$$

39. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$2^{27} \cdot n \leq 2^n + 13 \cdot 2^{28}.$$

40. O zdaniu¹ $T(n)$ wiadomo, że $T(7)$ jest fałszywe, $T(17)$ jest prawdziwe, a ponadto dla każdej liczby naturalnej n zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+1)$. Czy stąd wynika, że

a) $T(5)$ jest fałszywe

b) $T(10)$ jest prawdziwe

c) $T(15)$ jest fałszywe

d) $T(20)$ jest prawdziwe

41. Niech $T(n)$ oznacza zdanie: Suma cyfr liczby n jest większa od 10. Czy prawdziwa jest implikacja

a) $T(27) \Rightarrow T(39)$

b) $T(99) \Rightarrow T(100)$

c) $T(63) \Rightarrow T(71)$

d) $T(29) \Rightarrow T(57)$

42. O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że prawdziwe jest $T(1)$, a ponadto dla każdej liczby naturalnej n implikacja $T(2n-1) \Rightarrow T(2n)$ **jest fałszywa**. Czy stąd wynika, że

a) $T(5)$ jest prawdziwe

b) $T(6)$ jest prawdziwe

c) $T(7)$ jest fałszywe

d) $T(8)$ jest fałszywe

43. O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że prawdziwe jest $T(1)$, a ponadto dla każdej liczby naturalnej n implikacja $T(3n-1) \Rightarrow T(3n)$ **jest fałszywa**. Czy stąd wynika, że

a) $T(7)$ jest prawdziwe

b) $T(8)$ jest prawdziwe

c) $T(9)$ jest fałszywe

d) $T(10)$ jest fałszywe

¹Zamiast słowa *zdanie* poprawniej jest użyć w tym kontekście określenia *formuła zdaniowa*, ale może to być nieco odstrasające.