

Kolokwium nr 2: poniedziałek 22.10.2018, godz. 14:15-15:00, materiał zad. 1–103.

Poziom standardowy (z myślą o ocenie co najwyżej dobrej)

2. Liczby wymierne i niewymierne.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach 15.10.2018 (grupy 2–5).

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami.

69. Dowieść, że liczba $\sqrt{15}$ jest niewymierna.

70. Czy istnieją takie liczby naturalne $m, n > 1$, że $\log_m n = 13/7$?

71. Dowieść, że liczba $\sqrt{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$ jest niewymierna.

72. Niech n będzie liczbą naturalną. Mając do dyspozycji nawiasy, n , liczby całkowite oraz znaki $+, -, \cdot, :$ i $\sqrt{}$ zapisać liczbę niewymierną dodatnią mniejszą od $\frac{1}{n}$.

73. Dowieść, że liczba $\log_{12} 18$ jest niewymierna.

74. Dowieść, że liczba $\log_{20} 50$ jest niewymierna.

75. Rozstrzygnąć, czy liczba $\log_2 3 + \log_4 5$ jest wymierna, czy niewymierna.

OSZUSTWO 76.

ZADANIE: Dowieść, że liczba $\sqrt{3 - \sqrt{8}} - \sqrt{2}$ jest niewymierna.

Rozwiązanie I:

Liczba $-\sqrt{2}$ jest niewymierna. Także liczba $\sqrt{3 - \sqrt{8}}$ jest niewymierna, bo gdyby była wymierna, to jej kwadrat $3 - \sqrt{8}$ też byłby liczbą wymierną, a nie jest. Zatem liczba $\sqrt{3 - \sqrt{8}} - \sqrt{2}$ jest niewymierna jako suma liczb niewymiernych.

Rozwiązanie II:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\sqrt{3 - \sqrt{8}} - \sqrt{2}$ jest wymierna i oznaczmy ją przez w . Wtedy

$$\begin{aligned} w &= \sqrt{3 - \sqrt{8}} - \sqrt{2} \\ w + \sqrt{2} &= \sqrt{3 - \sqrt{8}} \\ w^2 + 2\sqrt{2}w + 2 &= 3 - 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2}(w + 1) + (w - 1)(w + 1) &= 0 \end{aligned}$$

Dzieląc ostatnią równość przez $w + 1$ otrzymujemy

$$2\sqrt{2} + w - 1 = 0,$$

co stanowi sprzeczność z założeniem wymierności liczby w , gdyż lewa strona równości jest liczbą niewymierną i nie może być równa 0.

Czy powyższe rozwiązania są poprawne?

77. Liczby a i b są dodatnie i niewymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczba $a + b$ jest niewymierna?

78. Liczby $a + b$, $b + c$ i $c + a$ są wymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczby a , b , c są wymierne?

79. Liczby $a + b$, $b + c$ i $c + a$ są niewymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczba $a + b + c$ jest niewymierna?

80. Liczby $a+b$, $b+c$, $c+d$ i $d+a$ są wymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczby a , b , c , d są wymierne?

81. Podać przykład takich liczb niewymiernych dodatnich a , b , c , d , e , f , że liczby

$$a+b+c, \quad b+c+d, \quad c+d+e, \quad d+e+f, \quad e+f+a, \quad f+a+b$$

są wymierne.

82. Dane są takie liczby rzeczywiste a , b , c , d , że liczby

$$a+b+c, \quad b+c+d, \quad c+d+a, \quad d+a+b$$

są wymierne. Dowieść, że liczba a jest wymierna.

83. Dla liczby wymiernej dodatniej $q = m/n$, gdzie $m, n \in \mathbb{N}$, zapisać warunek $\log_2 3 < q$ używając tylko liczb m , n , działań na liczbach całkowitych, znaków nierówności i ewentualnie symboli logicznych. Wykorzystać ten warunek do porównania $\log_2 3$ z liczbami $3/2$, $5/3$ oraz $8/5$. Nie używać kalkulatora. Wolno wykonywać bezpośrednie obliczenia na liczbach całkowitych dodatnich mniejszych od 300.

20 przykładów.

Odpowiedzi, których poprawności nie da się uzasadnić elementarnie, nie mogą być zaliczone.

Dać przykład takiej liczby rzeczywistej x , że

84. $0 < x < 1$ oraz x jest niewymierna,

85. $\sqrt{5} < x < \sqrt{6}$ oraz x jest wymierna,

86. x^2 i x^3 są niewymierne, ale x^5 jest wymierna,

87. x^4 i x^6 są wymierne, ale x^5 jest niewymierna,

88. $(x+1)^2$ jest niewymierna,

89. x jest niewymierna, ale $x + \frac{1}{x}$ jest wymierna,

90. x jest niewymierna i 2^x jest niewymierna,

91. $2^x + 3^x$ jest liczbą niewymierną,

92. $2^x + 3^x$ jest liczbą wymierną,

93. $\log_2 x + \log_3 x$ jest liczbą niewymierną,

94. $\log_2 x + \log_3 x$ jest liczbą wymierną,

95. $\log_2 x \cdot \log_3 x$ jest liczbą niewymierną,

96. $\log_2 x \cdot \log_3 x$ jest liczbą wymierną,

97. $2^x + \log_2 x$ jest liczbą całkowitą dodatnią,

98. $2^x + \log_2 x$ jest liczbą niewymierną,

99. $x + \log_2 x$ jest liczbą wymierną niecałkowitą,

100. $x^{\sqrt{2}}$ jest liczbą wymierną niecałkowitą,

101. $x^{\sqrt{2}}$ jest liczbą niewymierną,

102. $\log_x(1+x)$ jest liczbą wymierną,

103. $\log_x(1+x)$ jest liczbą niewymierną.