Kolokwium nr 72: czwartek 25.10.2018, godz. 8:15-9:00, materiał zad. 1–103, 701–748.

742. Dowieść, że liczba $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}$ jest niewymierna.

743. Dowieść, że nie istnieje liczba wymierna dodatnia q spełniająca równość

$$q^q=5\,.$$

744. Chcemy zlokalizować położenie względem liczb wymiernych, liczby rzeczywistej $q>1$ spełniającej równanie z poprzedniego zadania. Dla dowolnej liczby wymiernej postaci m/n, gdzie m jest liczbą całkowitą, a n liczbą naturalną, zapisać warunki $m/n<q$ oraz $m/n>q$ używając tylko liczb m, n, działań na liczbach całkowitych, znaków nierówności i ewentualnie symboli logicznych.

Wykorzystać te warunki do porównania liczby q z liczbami $5/2$ oraz $25/12$ (bez użycia kalkulatora, korzystając z nierówności typu: $25<27$, $125<128$).

745. Dane są takie liczby rzeczywiste a, b, c, d, e, że liczby

$$a+b+c,\quad b+c+d,\quad c+d+e,\quad d+e+a,\quad e+a+b$$

są wymierne. Dowieść, że liczba a jest wymierna.

746. Dane są takie liczby rzeczywiste a, b, c, d, e, f, g, że liczby

$$a+b+c+d+e,\quad b+c+d+e+f,\quad c+d+e+f+g,\quad d+e+f+g+a,$$
$$e+f+g+a+b,\quad f+g+a+b+c,\quad g+a+b+c+d$$

są wymierne. Dowieść, że liczba a jest wymierna.

747. Dowieść, że liczba $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ jest niewymierna.

748. Liczba wymierna $q>1$ spełnia równość $3^q=q^3$. Udowodnić, że $q=3$.
Jeśli nie potrafisz rozwiązać tego zadania, pomyśl nad rozwiązaniem częściowym polegającym na udowodnieniu jednego z następujących twierdzeń:
- Liczba wymierna $q>1$ spełniająca równość $3^q=q^3$ musi być całkowita.
- Liczba całkowita $q>1$ spełniająca równość $3^q=q^3$ musi być równa 3.

Uwaga: Istnieje liczba niewymierna $q\approx 2{,}47805268$ spełniająca równanie $3^q=q^3$.

W każdym z poniższych zadań wpisz w miejscu kropek dwie liczby występujące w ciągu 0, 1, 2, 5 ,10, 100, 10^5, 10^{10}, 10^{20}, 10^{50}, 10^{100}, 10^{200}, 10^{500}, 10^{1000}, 10^{2000}, 10^{5000}, 10^{10000}, 10^{20000}, 10^{50000}, 10^{100000}, 10^{200000}, 10^{500000}, $10^{1000000}$ na **kolejnych** miejscach tak, aby powstały prawdziwe nierówności.

749. ..... $<5000!<$ .....

750. ..... $<35000!<$ .....

751. ..... $<\left(10^5\right)!<$ .....

752. ..... $<\left(7+2\sqrt{2}\right)^{500}<$ .....

753. ..... $<\left(6+3\sqrt{2}\right)^{500}<$ .....

754. ..... $<\left(91+\sqrt{91}\right)^{100}<$ .....

755. ..... $<\binom{1000}{3}<$ .....

756. ..... $<\binom{1000}{4}<$ .....

757. ..... $<\binom{10000}{5}<$ .....

758. ..... $<\sum_{n=1}^{10^{30}} n<$ .....

759. ..... $<\sum_{n=1}^{10^{30}} n^2<$ .....

760. ..... $<\sum_{n=1}^{10^{30}} n^{10}<$ .....

761. ..... $<\sum_{n=1}^{10^{4}} n!<$ .....

762. ..... $<\binom{10^5}{100}<$ .....

763. ..... $<\binom{10^{10}}{20}<$ .....

Przy każdej z poniższych pięciu liczb n podaj w miejscu kropek liczbę cyfr liczby n oraz pierwszą (od lewej) cyfrę liczby n w zapisie dziesiętnym.

764. $n=\binom{10^{100}}{2}$, liczba cyfr ....., pierwsza cyfra .....

765. $n=\binom{10^{100}}{3}$, liczba cyfr ....., pierwsza cyfra .....

766. $n=\binom{2\cdot 10^{100}}{2}$, liczba cyfr ....., pierwsza cyfra .....

767. $n=\binom{2\cdot 10^{100}}{3}$, liczba cyfr ....., pierwsza cyfra .....

768. $n=\binom{2\cdot 10^{100}}{4}$, liczba cyfr ....., pierwsza cyfra .....

769. Wskazać taką liczbę naturalną n, że
$$n^{1000000}+1<2^n\,.$$

770. Która z liczb jest większa: $\prod_{i=2}^{2018}\prod_{j=1}^{i-1}\left(\sqrt[j]{j}-\sqrt[i]{i}\right)$ czy $10^{-1000000}$?

Oszacować podane wyrażenia, gdzie $n\in\mathbb{N}$, od góry i od dołu przez wyrażenia różniące się stałym czynnikiem dodatnim

771. $\dfrac{2^n+10n^2}{2^n+n^4}$ **772.** $\dfrac{4^n+n^4}{2^n+n^2}$ **773.** $\dfrac{n!}{n!+10^n}$ **774.** $\dfrac{(n+2)!}{n!+10^n}$

Dla podanego wyrażenia $W(n)$ dobrać odpowiednie stałe g oraz C i udowodnić, że nierówności $g-C/n<W(n)<g+C/n$ są prawdziwe dla każdej liczby naturalnej n.

775. $\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2}+\dfrac{n}{n^2+3}+\ldots+\dfrac{n}{n^2+n}$ **776.** $\sqrt[4]{n^4+n^3}-n$

777. Udowodnić nierówności $1-\dfrac{4}{n^{3/4}}<\sqrt[n]{n}<1+\dfrac{4}{n^{3/4}}$.

778. Udowodnić nierówności $1-\dfrac{1000}{n^{999/1000}}<\sqrt[n]{n}<1+\dfrac{1000}{n^{999/1000}}$.

Przypomnienie fragmentu rachunków z wykładu:

Niech $c_n=\sqrt[n]{n}-1$. Wówczas
$$n=(1+c_n)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}c_n^k\,,$$
skąd
$$\binom{n}{k}c_n^k<n$$
dla $n\geqslant k$.

779. Dowieść, że ciąg (a_n) określony wzorem
$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$
jest rosnący.

780. Dowieść, że ciąg (a_n) określony wzorem
$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$
jest malejący.

781. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności
$$C\leqslant\sqrt[8]{n^8+255n^7}-n\leqslant 32C\,.$$