

Kolokwium nr 75: czwartek 29.11.2018, godz. 8:15-9:00, materiał zad. 1–264, 701–822.

819. Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru

$$\left\{ \sqrt{n^2 + 5n + 3} - n : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

820. Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru

$$\left\{ \sqrt{n^2 + 5n + 10} - n : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

821. Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru

$$\left\{ \frac{1}{m^2 - 7n^2} : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

822. Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kres górny zbioru

$$\left\{ \frac{kmn}{k^2 + m^3 + n^6} : k, m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

823. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = 1.$$

824. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że sumy szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^3, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4$$

są liczbami całkowitymi.

825. Podać przykład takiego ciągu (a_n) , że szeregi

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n-2} + a_{3n-1} + a_{3n}), \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n-1} + a_{3n} + a_{3n+1}) \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n} + a_{3n+1} + a_{3n+2})$$

są zbieżne, a ponadto

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n-2} + a_{3n-1} + a_{3n}) = 6, \quad a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n-1} + a_{3n} + a_{3n+1}) = 1$$

oraz

$$a_1 + a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n} + a_{3n+1} + a_{3n+2}) = 3.$$

826. Obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$.

827. Obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3 + (-1)^n)^n}$.

828. Podać przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach nieujemnych i sumie równej 1, że dla nieskończenie wielu liczb naturalnych n zachodzi równość $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

829. Rozstrzygnąć zbieżność szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{5n^7 + 4n^4 - 1}}{5n^5 - 4n^4 + 1} \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{5n^8 + 4n^4 - 1}}{5n^5 - 4n^4 + 1}.$$

830. Dany jest zbieżny szereg geometryczny $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o sumie S . Wiadomo, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = T.$$

Wyznaczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ w zależności od S i T .

831. Obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 3n}$.

832. Obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^3 - 4n}$.

833. Obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 5n}$.

834. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^3 = \frac{7}{2}.$$

835. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **wymiernych dodatnich**, że jego suma jest liczbą wymierną, a ponadto zachodzi równość

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4.$$

Dla podanego przykładu obliczyć wartości sum $S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ oraz $S_4 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4$.

836. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **wymiernych dodatnich**, że sumy $S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ oraz $S_4 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4$ są liczbami całkowitymi, a ponadto zachodzi równość $S_2 = S_4$. Dla podanego przykładu podać wartości sum S_1 , S_2 i S_4 .

Wskazówka: Nie istnieje czysty szereg geometryczny spełniający warunki zadania, ale przykład można skonstruować odpowiednio modyfikując szereg geometryczny.

837. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **wymiernych dodatnich**, że zachodzi równość

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^3.$$

Dla podanego przykładu obliczyć wartości sum $S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ oraz $S_3 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$.