

Kolokwium nr 76: czwartek 6.12.2018, godz. 8:15-9:00, materiał zad. 1–414, 701–837.

Dla podanej funkcji f wskazać taką liczbę M , że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność $|f(x)| \leq M$.

838. $f(x) = e^{\sin x}$

839. $f(x) = \frac{x}{x^4 + 3}$

840. $f(x) = \frac{x^{1000}}{2^{|x|}}$

841. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej x zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{8x+7}{5x+\sqrt{x}+8} \leq 6 \cdot C.$$

842. Wybrać odpowiednią liczbę całkowitą N i udowodnić, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność

$$\frac{3^x + 4^x + 9^x}{3^x + 8^x + 9^x} \leq N$$

oraz wykazać istnienie takiej liczby rzeczywistej x , że

$$\frac{3^x + 4^x + 9^x}{3^x + 8^x + 9^x} > N - 1.$$

843. Dana jest funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \sqrt[8]{x^2 + 10^8}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - y|}{4000}.$$

844. Dana jest funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \sqrt[8]{x^4 + 10^8}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - y|}{20}.$$

845. Funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$f(x) = -\frac{25x}{24} + \frac{\sqrt{49x^2 + 37}}{24}.$$

Dowieść, że f jest odwrotna do samej siebie.

846. Dowieść, że równanie

$$x^{1000000} + 2 = (1,000001)^x$$

ma co najmniej jedno rozwiązanie rzeczywiste. Wskazać konkretny (być może niepotrzebnie duży) przedział, w którym znajduje się rozwiązanie.

847. Dla których liczb

$$n \in \{2, 4, 10, 20, 50, 100, 200, 500, 1000, 10^5, 10^{10}, 10^{30}, 10^{100}, 10^{1000}\}$$

wykres funkcji $f(x) = 2^x$ przecina wykres funkcji $g(x) = x^n + 4$, jeżeli za jednostkę na osiach przyjmiemy 1 cm. Przyjąć promień wszechświata równy 10^{28} cm. Punkty przecięcia wykresów leżące w innych wszechświatach nas nie interesują.

Jak zmieni się odpowiedź, gdy wykonamy rysunek biorąc za jednostkę na osiach średnicę atomu (10^{-8} cm) lub średnicę jądra atomowego (10^{-13} cm)?

848. Dowieść, że równanie $x^2 = 25\pi^2 \cdot \cos x$ ma co najmniej 10 rozwiązań rzeczywistych.

849. Dowieść, że równanie $x^2 = 25\pi^2 \cdot \cos(x^3)$ ma więcej niż 1000 rozwiązań rzeczywistych.

850. Podać przykład funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ciągłej w zerze, nieciągłej w pozostałych punktach.

851. Podać przykład funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ciągłej w punktach postaci $1/n$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, nieciągłej w pozostałych punktach.

852. Niech funkcja $f: [0, 16] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = \sqrt{x^3}$.

Zdanie Z: Dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [0, 16]$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq C \cdot |x - y|.$$

a) Dowieść, że **zdanie Z** jest prawdziwe dla $C = 6$.

b) Dowieść, że **zdanie Z** jest fałszywe dla $C = 5$.

Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem

853. $f(x) = \log_4(2^x + 8^x)$

854. $f(x) = \log_2(2^{2x} - 2^{4x+1} + 2^{6x})$

Obliczyć granice funkcji

855. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^x}\right)^{(x+1)^x}$ **856.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^x}\right)^{(x+1)^{x+1}}$ **857.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^x}\right)^{(x+256)^x}$

858. $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2^{2^{1/x}}$ **859.** $\lim_{x \rightarrow 0^-} 2^{2^{1/x}}$ **860.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{2^{1/x}}$ **861.** $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2^{2^{2^{1/x}}}$ **862.** $\lim_{x \rightarrow 0^-} 2^{2^{2^{1/x}}}$

863. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{2^{2^{1/x}}}$ **864.** $\lim_{x \rightarrow 16^-} \{\log_4 x\}$ **865.** $\lim_{x \rightarrow 16^+} \{\log_4 x\}$ **866.** $\lim_{x \rightarrow 16^-} \{\log_8 x\}$

Przypomnienie: Zapis $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y .