Kolokwium nr 78: czwartek 20.12.2018, godz. 8:15-**9:15**, materiał zad. 1–520, 701–866.
Kolokwium nr 79: czwartek 3.01.2019, godz. 8:15-9:00, materiał zad. 1–520, 701–869.

867. Dana jest taka funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, że dla każdych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant(x-y)^2\,.$$

Udowodnić, że dla każdych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$\left|f\left(\sqrt[16]{x^{16}+10^{16}}\right)-f\left(\sqrt[16]{y^{16}+10^{16}}\right)\right|\leqslant(x-y)^{16}\,.$$

868. Dana jest taka funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, że dla każdej liczby rzeczywistej x i każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$|f(x+n)-f(x)|<\frac{1}{n}\,.$$

Dowieść, że funkcja f jest okresowa.

869. Dana jest taka funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, że dla każdych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant 10\cdot|x-y|\,,$$

a dla każdych liczb rzeczywistych x, y spełniających warunek $|x-y|\geqslant 10$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|\,.$$

Dowieść, że

$$|f(6)-f(0)|\leqslant 50\,.$$

870. Funkcja $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$f(x)=\ln\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right).$$

Funkcja g jest złożeniem 2018 egzemplarzy funkcji f:

$$g(x)=f(f(f(\ldots f(f(x))\ldots)))\,.$$

Rozstrzygnąć, czy liczba $g'\left(\sqrt{e}\right)$ jest wymierna.

871. Podać (z wyprowadzeniem i uzasadnieniem poprawności) przykład takiego wielomianu $W(x)$ stopnia trzeciego o współczynnikach całkowitych, że funkcja $f(x)=W(\{x\})$ jest różniczkowalna.

Uwaga: $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x.

872. Chcemy zaokrąglić modułowi *dzióbek*. Niech n będzie liczbą naturalną. Dobrać takie a, b, c zależne od n, aby funkcja f_n określona wzorem

$$f_n(x)=\begin{cases} |x| & \text{dla} \quad |x|\geqslant 1/n \\ \\ ax^2+bx+c & \text{dla} \quad |x|<1/n \end{cases}$$

była różniczkowalna. Obliczyć f_n'. Naszkicować wykres funkcji f_n oraz wykres jej pochodnej.

873. Na potrzeby tego zadania funkcję f nazwiemy **pikoróżniczkowalną** w punkcie x_0, jeżeli istnieje granica

$$f^{\spadesuit}(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h^2},$$

którą to granicę nazywać będziemy **pikopochodną** funkcji f w punkcie x_0.

Obliczyć pikopochodną funkcji f określonej wzorem

$$f(x)=x^3+3x^2$$

we wszystkich punktach jej pikoróżniczkowalności.

874. W każdym z zadań[1] **874.1-874.8** dla podanej funkcji $f_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ podaj wartości pochodnych jednostronnych funkcji f_i w zerze.

874.1. $f_1(x)=\sqrt{\sqrt{x^2+1}-1}$ $\quad f_1'(0^-)=\ldots\ldots\ldots$ $\quad f_1'(0^+)=\ldots\ldots\ldots$

874.2. $f_2(x)=\sqrt{\sqrt{2x^2+1}-1}$ $\quad f_2'(0^-)=\ldots\ldots\ldots$ $\quad f_2'(0^+)=\ldots\ldots\ldots$

874.3. $f_3(x)=\sqrt{\sqrt{x^2+4}-2}$ $\quad f_3'(0^-)=\ldots\ldots\ldots$ $\quad f_3'(0^+)=\ldots\ldots\ldots$

874.4. $f_4(x)=\sqrt{\sqrt{8x^2+81}-9}$ $\quad f_4'(0^-)=\ldots\ldots\ldots$ $\quad f_4'(0^+)=\ldots\ldots\ldots$

874.5. $f_5(x)=\sqrt{\sqrt[4]{x^2+1}-1}$ $\quad f_5'(0^-)=\ldots\ldots\ldots$ $\quad f_5'(0^+)=\ldots\ldots\ldots$

874.6. $f_6(x)=\sqrt{\sqrt[4]{2x^2+1}-1}$ $\quad f_6'(0^-)=\ldots\ldots\ldots$ $\quad f_6'(0^+)=\ldots\ldots\ldots$

874.7. $f_7(x)=\sqrt{\sqrt[4]{x^2+16}-2}$ $\quad f_7'(0^-)=\ldots\ldots\ldots$ $\quad f_7'(0^+)=\ldots\ldots\ldots$

874.8. $f_8(x)=\sqrt{\sqrt[4]{8x^2+81}-3}$ $\quad f_8'(0^-)=\ldots\ldots\ldots$ $\quad f_8'(0^+)=\ldots\ldots\ldots$

---

[1] Zadanie **874.1** jest powtórzeniem zadania **564** z listy 17.

875. W każdym z zadań **875.1-875.4** funkcja $g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją odwrotną do funkcji $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określonej podanym wzorem. W każdym z tych zadań podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartości pochodnej funkcji g_i w trzech podanych punktach.

875.1. $f_1(x) = x^3 + x$

$g_1'(0) = \ldots\ldots\ldots$ $g_1'(2) = \ldots\ldots\ldots$ $g_1'(130) = \ldots\ldots\ldots$

875.2. $f_2(x) = x^7 + x$

$g_2'(0) = \ldots\ldots\ldots$ $g_2'(2) = \ldots\ldots\ldots$ $g_2'(130) = \ldots\ldots\ldots$

875.3. $f_3(x) = x^3 + 5x$

$g_3'(0) = \ldots\ldots\ldots$ $g_3'(6) = \ldots\ldots\ldots$ $g_3'(42) = \ldots\ldots\ldots$

875.4. $f_4(x) = x^5 + 5x$

$g_4'(0) = \ldots\ldots\ldots$ $g_4'(6) = \ldots\ldots\ldots$ $g_4'(42) = \ldots\ldots\ldots$

---

876. W każdym z zadań **876.1-876.5** dla podanej funkcji $g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiujemy funkcję $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wzorem

$$f_i(g_i(x)) = x^3 + 3x\,.$$

W każdym z tych zadań podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartości pochodnej funkcji f_i w trzech podanych punktach.

876.1. $g_1(x) = x^3 + x + 6$ $f_1'(8) = \ldots\ldots$ $f_1'(16) = \ldots\ldots$ $f_1'(36) = \ldots\ldots$

876.2. $g_2(x) = x^3 + 2x + 3$ $f_2'(6) = \ldots\ldots$ $f_2'(15) = \ldots\ldots$ $f_2'(36) = \ldots\ldots$

876.3. $g_3(x) = 2x^3 + x$ $f_3'(3) = \ldots\ldots\ldots$ $f_3'(18) = \ldots\ldots\ldots$ $f_3'(57) = \ldots\ldots\ldots$

876.4. $g_4(x) = x^5 + x + 2$ $f_4'(2) = \ldots\ldots$ $f_4'(4) = \ldots\ldots$ $f_4'(36) = \ldots\ldots$

876.5. $g_5(x) = x^5 + 2x$ $f_5'(0) = \ldots\ldots\ldots$ $f_5'(3) = \ldots\ldots\ldots$ $f_5'(36) = \ldots\ldots\ldots$