

W kolejnych zadaniach f i g są funkcjami różniczkowalnymi na wspólnej dziedzinie (będącej przedziałem) tyle razy, ile potrzeba. Gwiazdka oznacza, że trzeba wykreślić jeden z wariantów podanych w nawiasie.

886. Dowieść, że jeżeli równanie $f(x) = g(x)$ ma n rozwiązań, to równanie

$$f^{(k)}(x) = g^{(k)}(x)$$

ma co (najmniej/najwyżej)* $(n+k/n-k)^*$ rozwiązań.

Wskazówka: Twierdzenie Rolle'a.

887. Dowieść, że jeżeli równanie

$$f^{(k)}(x) = g^{(k)}(x)$$

ma n rozwiązań, to równanie $f(x) = g(x)$ ma co (najmniej/najwyżej)* $(n+k/n-k)^*$ rozwiązań.

888. Dowieść, że jeżeli równanie $f(x) = g(x)$ ma n pierwiastków (liczonych z krotnościami), to równanie

$$f^{(k)}(x) = g^{(k)}(x)$$

ma co (najmniej/najwyżej)* $(n+k/n-k)^*$ pierwiastków (liczonych z krotnościami).

Uwaga: Pierwiastek p -krotny równania $f(x) = g(x)$ to taka liczba x , że $f^{(i)}(x) = g^{(i)}(x)$ dla $i = 0, 1, 2, \dots, p-1$ oraz $f^{(p)}(x) \neq g^{(p)}(x)$.

889. Dowieść, że jeżeli równanie

$$f^{(k)}(x) = g^{(k)}(x)$$

ma n pierwiastków (liczonych z krotnościami), to równanie

$$f(x) = g(x)$$

ma co (najmniej/najwyżej)* $(n+k/n-k)^*$ pierwiastków (liczonych z krotnościami).

890. Wyznaczyć liczbę rozwiązań równania $2^x = x^2$.

891. Wyznaczyć liczbę rozwiązań równania $2^x = x^{100}$.

892. Wyznaczyć liczbę rozwiązań równania $2^x = x^{101}$.

893. Dowieść, że

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}.$$

894. Funkcja różniczkowalna $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ spełnia warunki $f(0) = 1$ i $f(1) = e$. Dowieść, że stąd wynika istnienie takiej liczby rzeczywistej x , że $f(x) = f'(x)$.

Wskazówka: Rozważyc funkcję g określoną wzorem $g(x) = \ln f(x)$.