

Kolokwium nr 81: czwartek 17.01.2019, godz. 8:15-10:00, materiał zad. 1–655, 701–894.

895. Na potrzeby tego zadania funkcję dwukrotnie różniczkowalną $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nazwiemy **superwypukłą**, jeżeli dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność $f''(x) \geq 1$. Dowieść, że dowolna funkcja superwypukła spełnia nierówność

$$f(1) \leq \frac{f(0) + f(2)}{2} - \frac{1}{2}.$$

896. Niech funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją odwrotną do funkcji $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem

$$g(x) = \frac{x^3}{3} + x.$$

Podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego wartości pochodnej drugiego rzędu funkcji f w podanych punktach.

$$f''\left(\frac{4}{3}\right) = \dots\dots\dots f''\left(\frac{14}{3}\right) = \dots\dots\dots f''(12) = \dots\dots\dots$$

897. Udowodnić nierówność $26 \cdot e^{\arctg 5} < 25 \cdot e^{\arctg 7}$.

898. Dana jest funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \sqrt[4]{x^2 + 12}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - y|}{6}.$$

899. Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$\arctg 100 + 2 \cdot \arctg 103 + 3 \cdot \arctg 106 \quad \text{czy} \quad 6 \cdot \arctg 104 ?$$

900. Niech $\mathbb{F}$ będzie zbiorem wszystkich funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniających następujące dwa warunki:

1° Dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność $|f(x)| \leq x^2$.

2° Dla każdych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność $|f(x) - f(y)| \leq 10 \cdot |x - y|$.

W każdym z zadań **900.1-900.15** podaj kres górny zbioru.

900.1. $\sup\{ f(4) : f \in \mathbb{F}\} = \dots\dots$	900.8. $\sup\{ f(2) - f(1) : f \in \mathbb{F}\} = \dots\dots$
900.2. $\sup\{ f(6) : f \in \mathbb{F}\} = \dots\dots$	900.9. $\sup\{ f(3) - f(2) : f \in \mathbb{F}\} = \dots\dots$
900.3. $\sup\{ f(9) : f \in \mathbb{F}\} = \dots\dots$	900.10. $\sup\{ f(3) - f(1) : f \in \mathbb{F}\} = \dots\dots$
900.4. $\sup\{ f(11) : f \in \mathbb{F}\} = \dots\dots$	900.11. $\sup\{ f(5) - f(2) : f \in \mathbb{F}\} = \dots\dots$
900.5. $\sup\{ f(15) : f \in \mathbb{F}\} = \dots\dots$	900.12. $\sup\{ f(5) - f(3) : f \in \mathbb{F}\} = \dots\dots$
900.6. $\sup\{ f(20) : f \in \mathbb{F}\} = \dots\dots$	900.13. $\sup\{ f(6) - f(2) : f \in \mathbb{F}\} = \dots\dots$
900.7. $\sup\{ f(30) : f \in \mathbb{F}\} = \dots\dots$	900.14. $\sup\{ f(6) - f(1) : f \in \mathbb{F}\} = \dots\dots$
	900.15. $\sup\{ f(7) - f(1) : f \in \mathbb{F}\} = \dots\dots$

901. Wyznaczyć liczbę naturalną k oraz liczby wymierne a i b , dla których prawdziwe jest następujące twierdzenie:

Dla dowolnej funkcji trzykrotnie różniczkowalnej $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o dodatniej pochodnej pierwszego rzędu, pochodna trzeciego rzędu funkcji f odwrotnej do g wyraża się wzorem:

$$f'''(g(x)) = \frac{a \cdot (g''(x))^2 + b \cdot g'(x) \cdot g'''(x)}{(g'(x))^k}.$$