

Kolokwium nr 4: poniedziałek 12.11.2018, godz. 14:15-15:00, materiał zad. 1–230.

Poziom standardowy (z myślą o ocenie co najwyżej dobrej)
Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami.

4. Szacowanie wyrażeń.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach 29.10, 5.11.2018 (grupy 2–5).

187. Wskazując odpowiednie liczby wymierne dodatnie C, D (niezależne od n) udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{4n^4 - 3n^3 + 2}{5n^4 + 4n^2 - 2} \leq D.$$

Wskazując odpowiednie liczby wymierne dodatnie C, D oraz liczbę rzeczywistą k udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \cdot n^k < W(n) < D \cdot n^k.$$

$$\mathbf{188.} \quad W(n) = \frac{n^3 + 2n^2 + 1}{\sqrt{n^6 + 2} + 2} \quad \mathbf{189.} \quad W(n) = \frac{2n^3 - n^2 + 1}{\sqrt[3]{n^2 + 1} + 1} \quad \mathbf{190.} \quad W(n) = \frac{\sqrt[5]{n^2 + 1}}{\sqrt[7]{n^3 + 1} + 1}$$

191. Dobrać odpowiednie liczby wymierne dodatnie C oraz D i udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{6n^{11} - 3n^6 + 2}{6n^{11} - 3n^5 + 3} \leq D.$$

Liczby C i D muszą spełniać nierówność $D \leq 8C$.

192. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leq \sqrt[3]{n^3 + 63n^2} - n \leq 7C.$$

193. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leq \sqrt[4]{n^4 + 80n^3} - n \leq 10C.$$

194. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{\sqrt{9n+16} - 3\sqrt{n}}{\sqrt{n+3} - \sqrt{n}} \leq 2C.$$

195. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{\sqrt{9n+40} - \sqrt{9n+16}}{\sqrt{4n+45} - \sqrt{4n+5}} \leq 5C.$$

Dla podanego wyrażenia $W(n)$ dobrać odpowiednie stałe g oraz C i udowodnić, że nierówności $g - C/n < W(n) < g + C/n$ są prawdziwe dla każdej liczby naturalnej n .

$$196. \frac{n^5 + n^4 + 1}{2n^5 + n^3 + 5} \quad 197. \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \quad 198. \frac{\sqrt{4n^4 + 1}}{n^2 + 1} \quad 199. \sqrt{n^2 + 4n} - n$$

Dla podanego wyrażenia $W(n, k)$ dobrać odpowiednią wartość parametru k i odpowiednie stałe dodatnie g oraz C i udowodnić, że nierówności $g - C/n < W(n, k) < g + C/n$ są prawdziwe dla każdej liczby naturalnej n .

$$200. \frac{\sqrt{n^k + 1}}{n^6 + n^5} \quad 201. \frac{\sqrt{n^6 + n^5}}{n^k + 1} \quad 202. \sqrt{n^8 + n^k} - n^4$$

5. Ciągi liczbowe, granica.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach 8.11.2018 (grupy 2–5).

Zbadać zbieżność ciągu (a_n) określonego podanym wzorem; obliczyć granicę, jeśli ciąg jest zbieżny. Wolno skorzystać ze wzoru $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$, gdy $|q| < 1$.

$$203. \frac{n}{n+7} \quad 204. \frac{5n^3 + n^2 - 6}{3n^4 + 7} \quad 205. \frac{5n^4 + n^2 - 6}{3n^4 + 7} \quad 206. \frac{5n^5 + n^2 - 6}{3n^4 + 7} \quad 207. \frac{\sqrt[3]{n^2 + n}}{n+2}$$

$$208. \frac{1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots - 2n}{\sqrt{n^2 + 2}} \quad 209. \frac{n}{1 + \sqrt{n}} \quad 210. n^n \cdot (-1)^n$$

$$211. \frac{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})^7}{n^3(1 + 7\sqrt{n+2})} \quad 212. \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n^2} \quad 213. \frac{3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n}{3^n}$$

$$214. \frac{\sqrt{3^n + 2^n}}{\sqrt{3^n + 1}} \quad 215. \sqrt{n^2 + 3n} - n \quad 216. n(\sqrt{n^2 + 7} - n)$$

$$217. \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+7} - \sqrt{n}} \quad 218. \frac{\sqrt{n^4 + 1} - n^2}{(\sqrt{n^4 + n} - n^2)^2} \quad 219. \frac{7n + (\sqrt[3]{n} \sqrt[6]{n})^5 \sqrt{9n+1}}{11n^3 + 7n + 3}$$

$$220. a_n = \begin{cases} (-1)^n \cdot n! & \text{dla } n \leq 100 \\ \frac{2^n}{2^{n+1}} & \text{dla } n > 100 \end{cases} \quad 221. \frac{1}{(2 + (-1)^n)^n} \quad 222. n^3 \cdot \sqrt{n^2 + 1} - n^4 - \frac{n^2}{2}$$

223. Wskazać liczbę naturalną k , dla której granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2 \cdot \sqrt[6]{n^k + 1}}{n^2 + 5 \cdot \sqrt[3]{n^7 + 7} + 7 \cdot \sqrt{n^5 + 5}}$$

istnieje i jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Obliczyć wartość granicy przy tak wybranej liczbie k .

224. Wskazać liczbę naturalną k , dla której granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^{14} + 9n^9 + 1} - n^7}{n^k}$$

istnieje i jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Obliczyć wartość granicy przy tak wybranej liczbie k .

Zadania do omówienia na konwersatorium 9.11.2018 (godz. 8:15-10:00).

225. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{\sqrt{36n+28} - \sqrt{36n+13}}{\sqrt{25n+75} - \sqrt{25n+11}} \leq 2C.$$

226. W każdym z zadań **226.1-226.10** podaj granicę (lub granicę niewłaściwą) ciągu.

$$\mathbf{226.1.} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^{12} + 5n^5} - n^5) = \dots \quad \mathbf{226.2.} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^{12} + 5n^5} - n^6) = \dots$$

$$\mathbf{226.3.} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^{12} + 6n^6} - n^6) = \dots \quad \mathbf{226.4.} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^{12} + 7n^7} - n^6) = \dots$$

$$\mathbf{226.5.} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^{12} + 7n^7} - n^7) = \dots \quad \mathbf{226.6.} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{n^{12} + 6n^6} - n^3) = \dots$$

$$\mathbf{226.7.} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{n^{12} + 6n^6} - n^4) = \dots \quad \mathbf{226.8.} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{n^{12} + 8n^8} - n^4) = \dots$$

$$\mathbf{226.9.} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{n^{12} + 9n^9} - n^4) = \dots \quad \mathbf{226.10.} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{n^{12} + 9n^9} - n^6) = \dots$$

227. Wskazać liczbę rzeczywistą k , dla której granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^k \cdot (\sqrt{n^{666} + 1} - n^{333}))$$

istnieje i jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Obliczyć wartość granicy przy tak wybranej liczbie k .

228. Wskazać liczbę rzeczywistą k , dla której granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^k \cdot (\sqrt[4]{n^{888} + 1} - n^{222}))$$

istnieje i jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Obliczyć wartość granicy przy tak wybranej liczbie k .

229. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^{16} + n^3} - n^8)^3}{(\sqrt{n^{16} + n^5} - n^8)^5}.$$

230. Dobrać odpowiednie liczby całkowite dodatnie s i t oraz odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{(\sqrt{n^{10} + 8n^7} - n^5)^s}{(\sqrt{n^8 + 3n^7} - n^4)^t} \leq 18C.$$