

Egzamin, 19.06.2019, godz. 9:00-13:20**Zadanie 11. (10 punktów)**

W każdym z zadań **11.1-11.5** podaj w postaci uproszczonej sumę szeregu.

Za każdą poprawną odpowiedź otrzymasz **2 punkty**.

$$11.1. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n+1} \right) = 0$$

$$11.2. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n} - \sqrt[n+2]{n+2} \right) = \sqrt{2} - 1$$

$$11.3. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n} - \sqrt[n+3]{n+3} \right) = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} - 2$$

$$11.4. \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n+1} \right) = \sqrt{2} - 1$$

$$11.5. \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n} - \sqrt[n+2]{n+2} \right) = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} - 2$$

Zadanie 12. (10 punktów)

W każdym z zadań **12.1-12.5** podaj w postaci uproszczonej normę supremum funkcji f określonej podanym wzorem w podanej dziedzinie.

Przypomnienie: $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in D_f\}$.

Za każdą poprawną odpowiedź otrzymasz **2 punkty**.

$$12.1. f(x) = x^2 - 5, \quad D_f = (-1, 3), \quad \|f\| = 5$$

$$12.2. f(x) = x^3 - 15, \quad D_f = (-1, 3), \quad \|f\| = 16$$

$$12.3. f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 5}, \quad D_f = \mathbb{R}, \quad \|f\| = 1/4$$

$$12.4. f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 5}, \quad D_f = \mathbb{R}, \quad \|f\| = 1$$

$$12.5. f(x) = \frac{1}{x^2 + 5x + 7}, \quad D_f = \mathbb{R}, \quad \|f\| = 4/3$$

Zadanie 13. (10 punktów)

W każdym z zadań **13.1-13.5** zapisz w postaci przedziału zbiór wszystkich rzeczywistych wartości parametru p , dla których podany szereg jest zbieżny.

Za każdą poprawną odpowiedź otrzymasz **2 punkty**.

13.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ jest zbieżny dla $p \in (1, +\infty)$

13.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ jest zbieżny dla $p \in (0, +\infty)$

13.3. $\sum_{n=1}^{\infty} (2p-1)^n$ jest zbieżny dla $p \in (0, 1)$

13.4. $\sum_{n=1}^{\infty} (2p+1)^n$ jest zbieżny dla $p \in (-1, 0)$

13.5. $\sum_{n=1}^{\infty} (3p+1)^n$ jest zbieżny dla $p \in (-2/3, 0)$

Zadanie 14. (10 punktów)

W każdym z zadań **14.1-14.5** podaj w postaci uproszczonej promień zbieżności szeregu potęgowego.

Za każdą poprawną odpowiedź otrzymasz **2 punkty**.

14.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n} \cdot x^n}{9^n}$, $R = 9/4$

14.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n} \cdot x^{2n}}{9^n}$, $R = 3/2$

14.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{3n}{n} \cdot x^{3n}}{2^n}$, $R = 2/3$

14.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{3n}{n} \cdot 3^n \cdot x^{2n}$, $R = 2/9$

14.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot x^n}{n^n}$, $R = e$

Zadanie **15.** (10 punktów)

Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int_1^3 \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x^2 - 4x + 4}}$. Doprowadzić wynik do postaci niezawierającej „arctg”.

Rozwiązanie:

Zauważamy, że

$$\int_1^3 \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x^2 - 4x + 4}} = \int_1^3 \frac{dx}{1 + \left(\sqrt[3]{x-2}\right)^2}$$

i wykonujemy podstawienie $t = \sqrt[3]{x-2}$, czyli $x = t^3 + 2$ i formalnie $dx = 3t^2 dt$. Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_1^3 \frac{dx}{1 + \left(\sqrt[3]{x-2}\right)^2} &= \int_{-1}^1 \frac{3t^2 dt}{1+t^2} = 3 \cdot \int_{-1}^1 \frac{t^2 + 1 - 1}{1+t^2} dt = 3 \cdot \int_{-1}^1 dt - 3 \cdot \int_{-1}^1 \frac{dt}{1+t^2} = \\ &= 6 - 3 \cdot \left(\operatorname{arctg} t \right) \Big|_{t=-1}^1 = 6 - 3 \cdot \operatorname{arctg} 1 + 3 \cdot \operatorname{arctg} (-1) = 6 - 3 \cdot \frac{\pi}{4} + 3 \cdot \frac{-\pi}{4} = 6 - \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Podana całka oznaczona ma wartość $6 - \frac{3\pi}{2}$.

Zadanie 16. (10 punktów)

Obliczyć wartość całki niewłaściwej $\int_{1/3}^{\infty} \frac{dx}{16x^3 + x}$. Doprowadzić wynik do postaci $\ln w$, gdzie w liczbą wymierną dodatnią.

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x \cdot (16x^2 + 1)} &= \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{16x^2 + 1}, \\ 1 &= A \cdot (16x^2 + 1) + (Bx + C) \cdot x, \\ 1 &= 16Ax^2 + A + Bx^2 + Cx, \\ 1 &= A, \quad 0 = C, \quad 0 = 16A + B, \\ A &= 1, \quad B = -16, \quad C = 0.\end{aligned}$$

Wobec tego¹

$$\begin{aligned}\int_{1/3}^{\infty} \frac{dx}{x \cdot (16x^2 + 1)} &= \int_{1/3}^{\infty} \frac{1}{x} - \frac{16x}{16x^2 + 1} dx = \left(\ln |x| - \frac{1}{2} \cdot \ln (16x^2 + 1) \right) \Big|_{x=1/3}^{\infty} = \\ &= \ln \sqrt{\frac{x^2}{16x^2 + 1}} \Big|_{x=1/3}^{\infty} = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \sqrt{\frac{x^2}{16x^2 + 1}} \right) - \ln \sqrt{\frac{1/9}{16/9 + 1}} = \ln \sqrt{\frac{1}{16}} - \ln \sqrt{\frac{1}{16 + 9}} = \\ &= \ln \frac{1}{4} - \ln \frac{1}{5} = \ln \frac{5}{4}.\end{aligned}$$

Odpowiedź: Podana całka niewłaściwa ma wartość $\ln \frac{5}{4}$.

Uwaga: Całki

$$\int_{1/3}^{\infty} \frac{1}{x} dx, \quad \int_{1/3}^{\infty} \frac{x}{16x^2 + 1} dx$$

są rozbieżne, a granice

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln |x|, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \ln (16x^2 + 1)$$

są nieskończone, nie mogą się więc pojawić w rozwiązaniu w konfiguracji prowadzącej do nieoznaczoności $\infty - \infty$. Pojawienie się tego typu wyrażeń spowoduje obniżenie punktacji, jeśli jednak rachunki wrócą na odpowiednie tory, zadanie może być uznane za rozwiązane (czyli otrzymać 50% lub więcej punktów).

Odpowiednie porządzenie sobie z przejściem granicznym jest kluczową częścią zadania. Bez tego elementu, nawet przy poprawnym wyniku liczbowym, zadanie nie może zostać uznane za rozwiązane (a więc ocena częściowa musi być mniejsza od 50%, czyli od 5 punktów).

¹Argumenty logarytmów są dodatnie w przedziale całkowania, więc moduły można pominąć.

Zadanie **21.** (10 punktów)

Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int_0^{\sqrt{3}} x^3 \cdot \operatorname{arctg} x \, dx$. Doprowadzić wynik do postaci $w \cdot \pi$, gdzie w liczbą wymierną.

Rozwiązanie:

Całkując przez części otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{3}} x^3 \cdot \operatorname{arctg} x \, dx &= \frac{x^4}{4} \cdot \operatorname{arctg} x \Big|_{x=0}^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^4}{4} \cdot \frac{1}{1+x^2} \, dx = \frac{9}{4} \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{3} - \frac{1}{4} \cdot \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^4 - 1 + 1}{1+x^2} \, dx = \\ &= \frac{9}{4} \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{1}{4} \cdot \int_0^{\sqrt{3}} x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2} \, dx = \frac{3\pi}{4} - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{x^3}{3} - x + \operatorname{arctg} x \Big|_{x=0}^{\sqrt{3}} \right) = \\ &= \frac{3\pi}{4} - \frac{1}{4} \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{3} + \operatorname{arctg} \sqrt{3}) = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{12} = \frac{8\pi}{12} = \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Podana całka oznaczona ma wartość $\frac{2\pi}{3}$.

Zadanie 22. (10 punktów)

Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int_0^{2\pi} \sin^2 x \cdot \cos^4 x \, dx$. Doprowadzić wynik do postaci $w \cdot \pi$, gdzie w liczbą wymierną.

Rozwiązanie:

Sposób I (bezpośrednie rachunki): Użyjemy liczb zespolonych do wyprowadzenia odpowiedniej tożsamości trygonometrycznej.

Przyjmijmy $z = \cos x + i \sin x$, co daje

$$z^n = \cos nx + i \sin nx, \quad z^{-n} = \cos nx - i \sin nx, \quad \cos nx = \frac{z^n + z^{-n}}{2}, \quad \sin nx = \frac{z^n - z^{-n}}{2i}.$$

Przy tych oznaczeniach otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \sin^2 x \cdot \cos^4 x &= \left(\frac{z - z^{-1}}{2i} \right)^2 \cdot \left(\frac{z + z^{-1}}{2} \right)^4 = \frac{(z^2 - 2 + z^{-2}) \cdot (z^4 + 4z^2 + 6 + 4z^{-2} + z^{-4})}{-64} = \\ &= \frac{z^6 + 2z^4 - z^2 - 4 - z^{-2} + 2z^{-4} + z^{-6}}{-64} = -\frac{\cos 6x}{32} - \frac{\cos 4x}{16} + \frac{\cos 2x}{32} + \frac{1}{16}. \end{aligned}$$

Inna wersja najbardziej uciążliwego fragmentu powyższych rachunków:

$$\begin{aligned} \left(\frac{z - z^{-1}}{2i} \right)^2 \cdot \left(\frac{z + z^{-1}}{2} \right)^4 &= \left(\frac{z - z^{-1}}{2i} \cdot \frac{z + z^{-1}}{2} \right)^2 \cdot \left(\frac{z + z^{-1}}{2} \right)^2 = \left(\frac{z^2 - z^{-2}}{4i} \right)^2 \cdot \left(\frac{z + z^{-1}}{2} \right)^2 = \\ &= \frac{(z^4 - 2 + z^{-4}) \cdot (z^2 + 2 + z^{-2})}{-64} = \frac{z^6 + 2z^4 - z^2 - 4 - z^{-2} + 2z^{-4} + z^{-6}}{-64}. \end{aligned}$$

Teraz możemy obliczyć daną w zadaniu całkę (zauważenie, że całka z cosinusa po pełnym okresie jest zerem, pozwala wydatnie uprościć obliczenia):

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 x \cdot \cos^4 x \, dx = \int_0^{2\pi} -\frac{\cos 6x}{32} - \frac{\cos 4x}{16} + \frac{\cos 2x}{32} + \frac{1}{16} \, dx = \frac{\pi}{8}.$$

Odpowiedź: Podana całka oznaczona ma wartość $\pi/8$.

Sposób II (użycie wielomianów trygonometrycznych dla uproszczenia rachunków):

Przy oznaczeniach jak w sposobie I otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \sin x \cdot \cos^2 x &= \left(\frac{z - z^{-1}}{2i} \right) \cdot \left(\frac{z + z^{-1}}{2} \right)^2 = \frac{(z - z^{-1}) \cdot (z^2 + 2 + z^{-2})}{8i} = \frac{z^3 + z - z^{-1} - z^{-3}}{8i} = \\ &= \frac{\sin 3x + \sin x}{4}. \end{aligned}$$

Ze wzoru Parsevala² dla funkcji

$$f(x) = \sin x \cdot \cos^2 x = \frac{\sin x}{4} + \frac{\sin 3x}{4}$$

otrzymujemy

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 x \cdot \cos^4 x \, dx = \int_0^{2\pi} (f(x))^2 \, dx = \pi \cdot \left(\left(\frac{1}{4} \right)^2 + \left(\frac{1}{4} \right)^2 \right) = \frac{\pi}{8}.$$

²Wzór Parsevala dla szeregów trygonometrycznych stosuje się także do wielomianów trygonometrycznych, które są szeregami o skończonej liczbie niezerowych wyrazów.

Zadanie 23. (10 punktów)

Wyznaczyć obszar zbieżności zespolonego szeregu potęgowego $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{8n}}{16^n \cdot n}$.

Podać w postaci kartezjańskiej liczby zespolone użyte do opisanie obszaru zbieżności.

Rozwiązanie:

Stosując kryterium Cauchy'ego (można też zastosować kryterium d'Alemberta) otrzymujemy

$$\sqrt[n]{\left| \frac{z^{8n}}{16^n \cdot n} \right|} = \frac{|z|^8}{16 \cdot \sqrt[n]{n}} \rightarrow \frac{|z|^8}{16}.$$

Jeżeli $|z|^8/16 < 1$, czyli $|z| < \sqrt{2}$, to dany szereg potęgowy jest zbieżny.

Jeśli zaś $|z|^8/16 > 1$, czyli $|z| > \sqrt{2}$, to jest on rozbieżny.

Wobec tego promień zbieżności szeregu jest równy $\sqrt{2}$ i pozostaje zbadać zbieżność na okręgu ograniczającym koło zbieżności.

Niech więc $|z| = \sqrt{2}$. Wówczas dany szereg potęgowy przyjmuje postać

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{8n}}{16^n \cdot n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{n},$$

gdzie $w = z^8/16$ jest liczbą zespoloną o module 1.

Jeżeli $w \neq 1$, to powyższy szereg jest zbieżny zgodnie z uogólnieniem kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

Natomiast dla $w = 1$ otrzymujemy szereg harmoniczny, a więc rozbieżny.

Pozostaje rozwiązać równanie $z^8/16 = 1$, czyli $z^8 = 16$.

Jednym z rozwiązań jest $z = \sqrt{2}$, a pozostałe rozwiązania leżą na okręgu o środku w zerze i promieniu $\sqrt{2}$ w równych odległościach kątowych — mają argumenty $k\pi/4$ przy $k = 1, 2, \dots, 7$.

Odpowiedź: Podany szereg jest zbieżny w kole o środku w zerze i promieniu $\sqrt{2}$ wraz z brzegiem oprócz ośmiu punktów: $\pm\sqrt{2}$, $\pm i\sqrt{2}$ oraz $\pm 1 \pm i$.

Zadanie 24. (10 punktów)

Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p \cdot \sum_{k=1}^{55n} \sqrt{\sqrt{n} + \sqrt{9n+k}}$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej parametru p , aby granica ta była dodatnia i skończona.

Rozwiązanie:

Przekształcamy sumę występującą pod znakiem granicy:

$$\begin{aligned} n^p \cdot \sum_{k=1}^{55n} \sqrt{\sqrt{n} + \sqrt{9n+k}} &= n^{p+1} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{55n} \sqrt{\sqrt{n} + \sqrt{9n+k}} = n^{p+5/4} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{55n} \sqrt{1 + \sqrt{9 + \frac{k}{n}}} = \\ &= n^{p+5/4} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{55n} f\left(\frac{k}{n}\right), \end{aligned}$$

gdzie $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{9+x}}$.

Ponieważ funkcja f jest całkowalna jako funkcja ciągła, jej sumy Riemanna odpowiadające ciągowi podziałów przedziału całkowania na $55n$ przedziałów równej długości $1/n$ dążą do całki oznaczonej, przy obliczaniu której korzystamy z podstawienia $t = \sqrt{1 + \sqrt{9+x}}$, czyli $x = (t^2 - 1)^2 - 9 = t^4 - 2t^2 - 8$ i formalnie $dx = (4t^3 - 4t) dt$.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{55n} f\left(\frac{k}{n}\right) &= \int_0^{55} f(x) dx = \int_0^{55} \sqrt{1 + \sqrt{9+x}} dx = \int_2^3 t \cdot (4t^3 - 4t) dt = 4 \cdot \int_2^3 t^4 - t^2 dt = \\ &= 4 \cdot \left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} \right) \Bigg|_{t=2}^3 = 4 \cdot \left(\frac{243-32}{5} - \frac{27-8}{3} \right) = 4 \cdot \left(\frac{211}{5} - \frac{19}{3} \right) = 4 \cdot \frac{633-95}{15} = 4 \cdot \frac{538}{15} = \\ &= \frac{2152}{15}. \end{aligned}$$

Powyższa wartość będzie granicą rozważanego w zadaniu ciągu, o ile wykładnik w wyrażeniu $n^{p+5/4}$ będzie równy 0, czyli dla $p = -5/4$.

Odpowiedź: Dla $p = -5/4$ dana w zadaniu granica ciągu jest równa $2152/15$.

Uwaga: Jeżeli nie została podana prawidłowa wartość $p = -5/4$, **ocena za zadanie nie może być wyższa niż 4 punkty.**

Zadanie **25.** (10 punktów)Obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4+4}$.

Rozwiązanie:

Rozłóżmy na ułamki proste wyraz ogólny szeregu:

$$\frac{n}{n^4+4} = \frac{n}{(n^2-2n+2) \cdot (n^2+2n+2)} = \frac{An+B}{n^2-2n+2} + \frac{Cn+D}{n^2+2n+2},$$

$$n = (An+B) \cdot (n^2+2n+2) + (Cn+D) \cdot (n^2-2n+2),$$

$$n = An^3 + 2An^2 + 2An + Bn^2 + 2Bn + 2B + Cn^3 - 2Cn^2 + 2Cn + Dn^2 - 2Dn + 2D,$$

$$\begin{cases} 0 &= 2B+2D, & (n^0) \\ 1 &= 2A+2B+2C-2D, & (n^1) \\ 0 &= 2A+B-2C+D, & (n^2) \\ 0 &= A+C. & (n^3) \end{cases}$$

Z pierwszego i czwartego równania dostajemy odpowiednio $D = -B$ oraz $C = -A$, co prowadzi kolejno do

$$\begin{cases} 1 &= 2A+2B-2A+2B, \\ 0 &= 2A+B+2A-B, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 &= 4B, \\ 0 &= 4A, \end{cases}$$

$$B = 1/4, \quad D = -1/4, \quad A = C = 0.$$

Zatem

$$\frac{n}{n^4+4} = \frac{1/4}{n^2-2n+2} - \frac{1/4}{n^2+2n+2} = \frac{1/4}{(n-1)^2+1} - \frac{1/4}{(n+1)^2+1}.$$

W konsekwencji sumy częściowe danego szeregu wyrażają się wzorem

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{n}{n^4+4} &= \sum_{n=1}^N \left(\frac{1/4}{(n-1)^2+1} - \frac{1/4}{(n+1)^2+1} \right) = \\ &= \left(\frac{1/4}{0^2+1} - \frac{1/4}{2^2+1} \right) + \left(\frac{1/4}{1^2+1} - \frac{1/4}{3^2+1} \right) + \left(\frac{1/4}{2^2+1} - \frac{1/4}{4^2+1} \right) + \dots \\ &\dots + \left(\frac{1/4}{(N-3)^2+1} - \frac{1/4}{(N-1)^2+1} \right) + \left(\frac{1/4}{(N-2)^2+1} - \frac{1/4}{N^2+1} \right) + \\ &+ \left(\frac{1/4}{(N-1)^2+1} - \frac{1/4}{(N+1)^2+1} \right) = \frac{1/4}{0^2+1} + \frac{1/4}{1^2+1} - \frac{1/4}{N^2+1} - \frac{1/4}{(N+1)^2+1} \rightarrow \frac{3}{8} \end{aligned}$$

przy $N \rightarrow \infty$.Odpowiedź: Suma danego szeregu jest równa $3/8$.

Zadanie 26. (10 punktów)

Dana jest taka funkcja ciągła $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$, że

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \leq 2 \quad \text{oraz} \quad \int_{-\infty}^{\infty} (f(x))^3 dx \leq 8.$$

Dowieść, że

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f(x))^2 dx \leq C,$$

gdzie $C = 5$ (**wersja łatwiejsza za 5 punktów**)

lub $C = 4$ (**wersja trudniejsza za 10 punktów**).

Rozwiązanie:

Z nierówności między średnimi geometryczną i arytmetyczną, po skorzystaniu z kryterium porównawczego dla całek niewłaściwych, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (f(x))^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{f(x) \cdot (f(x))^3} dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x) + (f(x))^3}{2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx + \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (f(x))^3 dx \leq \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 8 = 5, \end{aligned}$$

co kończy rozwiązanie za 5 punktów.

Z nierówności między średnimi geometryczną i arytmetyczną, po skorzystaniu z kryterium porównawczego dla całek niewłaściwych, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (f(x))^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{f(x) \cdot (f(x))^3} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2f(x) \cdot \frac{(f(x))^3}{2}} dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2f(x) + \frac{(f(x))^3}{2}}{2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} 2f(x) dx + \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(f(x))^3}{2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx + \frac{1}{4} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (f(x))^3 dx \leq 2 + \frac{1}{4} \cdot 8 = 4, \end{aligned}$$

co kończy rozwiązanie za 10 punktów.

Zadanie 31. (10 punktów)

Rozstrzygnąć, czy wartość całki oznaczonej

$$\int_7^8 \sqrt[3]{x^2+15} dx \approx 4,146$$

jest mniejsza czy większa od $199/48 \approx 4,146$.*Rozwiązanie:*Oznaczmy przez f funkcję podcałkową:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2+15}.$$

Wówczas

$$f'(x) = \frac{2x}{3 \cdot (x^2+15)^{2/3}}$$

oraz

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2}{3 \cdot (x^2+15)^{2/3}} - \frac{8x^2}{9 \cdot (x^2+15)^{5/3}} = \frac{6 \cdot (x^2+15)}{9 \cdot (x^2+15)^{5/3}} - \frac{8x^2}{9 \cdot (x^2+15)^{5/3}} = \\ &= \frac{6x^2 + 6 \cdot 15 - 8x^2}{9 \cdot (x^2+15)^{5/3}} = \frac{-2x^2 + 90}{9 \cdot (x^2+15)^{5/3}} = \frac{2 \cdot (-x^2 + 45)}{9 \cdot (x^2+15)^{5/3}} < 0 \end{aligned}$$

dla $x > \sqrt{45}$, skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wklęsła w przedziale $[\sqrt{45}, \infty)$ zawierającym interesujący nas przedział całkowania $[7, 8]$.Zatem wykres funkcji f dla $x > 7$ leży poniżej prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie 7. Ponieważ $f(7) = 4$ oraz $f'(7) = 7/24$, dla $x > 7$ zachodzi nierówność

$$f(x) < 4 + \frac{7(x-7)}{24}$$

i w konsekwencji

$$\int_7^8 \sqrt[3]{x^2+15} dx < \int_7^8 4 + \frac{7(x-7)}{24} dx = 4 + \frac{7}{48} = \frac{199}{48}.$$

Wartość ostatniej całki można obliczyć całkując bezpośrednio albo interpretując ją geometrycznie jako pole odpowiedniego trapezu.

Odpowiedź: Wartość podanej całki oznaczonej jest mniejsza od $199/48$.

Zadanie **32.** (10 punktów)

Podać przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{a_n}{n}}$ jest rozbieżny.

Rozwiązanie:

Niech

$$a_n = \frac{1}{n \cdot (\log_2 n)^2}$$

dla $n \geq 2$ oraz $a_1 = 2019$.

Wówczas³

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (\log_2 n)^2} < +\infty$$

oraz

$$\sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{\frac{a_n}{n}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \log_2 n} = +\infty.$$

³Zmiana dolnej granicy sumowania nie wpływa na zbieżność szeregu.

Zadanie 33. (10 punktów)

Podać przykład takiego ciągu (a_n) , że szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^5$ i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^9$ są zbieżne, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^7$ jest rozbieżny.

Rozwiązanie:

Przykładem o własnościach sformułowanych w treści zadania jest ciąg (a_n) zdefiniowany wzorem

$$a_{k(m-1)+r} = \begin{cases} \frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[7]{m}} & \text{dla } r=1, \\ -\frac{1}{\sqrt[7]{m}} & \text{dla } r=2,3. \end{cases}$$

Powyższy ciąg prowadzi do następujących szeregów:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^5 &= 2 - 1 - 1 + \frac{2}{\sqrt[7]{2^5}} - \frac{1}{\sqrt[7]{2^5}} - \frac{1}{\sqrt[7]{2^5}} + \frac{2}{\sqrt[7]{3^5}} - \frac{1}{\sqrt[7]{3^5}} - \frac{1}{\sqrt[7]{3^5}} + \frac{2}{\sqrt[7]{4^5}} - \frac{1}{\sqrt[7]{4^5}} - \frac{1}{\sqrt[7]{4^5}} \dots = \\ &= (2 - 1 - 1) + \left(\frac{2}{\sqrt[7]{2^5}} - \frac{1}{\sqrt[7]{2^5}} - \frac{1}{\sqrt[7]{2^5}} \right) + \left(\frac{2}{\sqrt[7]{3^5}} - \frac{1}{\sqrt[7]{3^5}} - \frac{1}{\sqrt[7]{3^5}} \right) + \\ &\quad + \left(\frac{2}{\sqrt[7]{4^5}} - \frac{1}{\sqrt[7]{4^5}} - \frac{1}{\sqrt[7]{4^5}} \right) \dots = 0 + 0 + 0 + 0 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0. \end{aligned}$$

Odnotujmy, że wobec $a_n \rightarrow 0$ możemy najpierw sumować po trzy kolejne wyrazy szeregu, a potem dodawać otrzymane sumy.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^7 &= 2^{7/5} - 1 - 1 + \frac{2^{7/5}}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{2^{7/5}}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2^{7/5}}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \dots = \\ &= \left(2^{7/5} - 1 - 1 \right) + \left(\frac{2^{7/5}}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{2^{7/5}}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{2^{7/5}}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) \dots = \\ &= \left(2^{7/5} - 1 - 1 \right) + \frac{(2^{7/5} - 1 - 1)}{2} + \frac{(2^{7/5} - 1 - 1)}{3} + \frac{(2^{7/5} - 1 - 1)}{4} + \dots = \\ &= \left(2^{7/5} - 1 - 1 \right) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty. \quad (\text{szereg harmoniczny}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^9 &= 2^{9/5} - 1 - 1 + \frac{2^{9/5}}{2^{9/7}} - \frac{1}{2^{9/7}} - \frac{1}{2^{9/7}} + \frac{2^{9/5}}{3^{9/7}} - \frac{1}{3^{9/7}} - \frac{1}{3^{9/7}} + \frac{2^{9/5}}{4^{9/7}} - \frac{1}{4^{9/7}} - \frac{1}{4^{9/7}} \dots = \\ &= \left(2^{9/5} - 1 - 1 \right) + \left(\frac{2^{9/5}}{2^{9/7}} - \frac{1}{2^{9/7}} - \frac{1}{2^{9/7}} \right) + \left(\frac{2^{9/5}}{3^{9/7}} - \frac{1}{3^{9/7}} - \frac{1}{3^{9/7}} \right) + \\ &\quad + \left(\frac{2^{9/5}}{4^{9/7}} - \frac{1}{4^{9/7}} - \frac{1}{4^{9/7}} \right) \dots = \left(2^{9/5} - 1 - 1 \right) + \frac{(2^{9/5} - 1 - 1)}{2^{9/7}} + \frac{(2^{9/5} - 1 - 1)}{3^{9/7}} + \\ &\quad + \frac{(2^{9/5} - 1 - 1)}{4^{9/7}} + \dots = \left(2^{9/5} - 1 - 1 \right) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{9/7}} < +\infty. \quad (\text{bo } 9/7 > 1) \end{aligned}$$

Zadanie 34. (10 punktów)

Podać przykład takiej funkcji ciągłej $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$, że całka

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

jest zbieżna, ale całka

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \sqrt{f(x)} dx$$

jest rozbieżna.

Rozwiązanie:

Wykresem funkcji f są ramiona opisanych niżej trójkątów równoramiennych, a poza tym f jest równa 0.

Trójkąty są parametryzowane liczbami naturalnymi n . Trójkąt o numerze n ma wierzchołki o następujących współrzędnych:

$$\left(n - \frac{1}{8^n}, 0\right), \quad \left(n + \frac{1}{8^n}, 0\right), \quad (n, 4^n).$$

Pole n -tego trójkąta jest równe $\frac{1}{2^n}$, skąd

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

Wykres funkcji $f\sqrt{f}$ stanowią trójkąty krzywoliniowe (o krzywoliniowych ramionach). Wysokość n -tego trójkąta krzywoliniowego jest równa 8^n , a jego pole

$$C \cdot \frac{1}{8^n} \cdot 8^n = C,$$

gdzie C jest pewną stałą⁴ (równą $4/5$, jeśli kogoś to interesuje). Stąd

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \sqrt{f(x)} dx = \sum_{n=1}^{\infty} C = +\infty.$$

⁴Wynika to z faktu, że wszystkie te trójkąty krzywoliniowe są afinicznie równoważne, czyli mają ten sam kształt zdeformowany pewnym rozciąganiem w kierunku poziomym i pewnym rozciąganiem w kierunku pionowym. Zatem dla tej rodziny trójkątów krzywoliniowych istnieje uniwersalna stała C , przy której pole jest równe $C \times \text{podstawa} \times \text{wysokość}$.

Zadanie **35.** (10 punktów)

W każdym z zadań **35.1-35.10** podaj w postaci uproszczonej wartość całki oznaczonej. Za każdą poprawną odpowiedź otrzymasz **1 punkt**.

$$A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{4^n}, \quad B(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{5^n},$$
$$C(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{10^n}, \quad D(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx}{10^n}.$$

35.1. $\int_0^{2\pi} A(x)^2 dx = \frac{\pi}{15}$

35.2. $\int_0^{2\pi} B(x)^2 dx = \frac{\pi}{24}$

35.3. $\int_0^{2\pi} C(x)^2 dx = \frac{\pi}{99}$

35.4. $\int_0^{2\pi} D(x)^2 dx = \frac{\pi}{99}$

35.5. $\int_0^{2\pi} A(x)B(x) dx = \frac{\pi}{19}$

35.6. $\int_0^{2\pi} A(x)C(x) dx = \frac{\pi}{39}$

35.7. $\int_0^{2\pi} A(x)D(x) dx = \frac{\pi}{159}$

35.8. $\int_0^{2\pi} B(x)C(x) dx = \frac{\pi}{49}$

35.9. $\int_0^{2\pi} B(x)D(x) dx = \frac{\pi}{249}$

35.10. $\int_0^{2\pi} C(x)D(x) dx = \frac{\pi}{999}$

Zadanie **36.** (10 punktów)

W każdym z zadań **36.1-36.10** podaj w postaci uproszczonej wartość całki oznaczonej. Za każdą poprawną odpowiedź otrzymasz **1 punkt**.

Wskazówka: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx + i \sin nx}{n!} = e^{\cos x} \cdot (\cos x + i \sin x)$.

$$\mathbf{36.1.} \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cdot \cos x \cdot \cos x \, dx = \pi$$

$$\mathbf{36.2.} \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cdot \cos x \cdot \cos 2x \, dx = \pi/2$$

$$\mathbf{36.3.} \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cdot \cos x \cdot \cos 3x \, dx = \pi/6$$

$$\mathbf{36.4.} \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cdot \cos x \cdot \cos 4x \, dx = \pi/24$$

$$\mathbf{36.5.} \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cdot \cos x \cdot \cos 5x \, dx = \pi/120$$

$$\mathbf{36.6.} \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cdot \sin x \cdot \sin x \, dx = \pi$$

$$\mathbf{36.7.} \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cdot \sin x \cdot \sin 2x \, dx = \pi/2$$

$$\mathbf{36.8.} \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cdot \sin x \cdot \sin 3x \, dx = \pi/6$$

$$\mathbf{36.9.} \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cdot \sin x \cdot \sin 4x \, dx = \pi/24$$

$$\mathbf{36.10.} \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cdot \sin x \cdot \sin 5x \, dx = \pi/120$$
