

**Egzamin, 19.06.2019, godz. 9:00-13:20****Zadanie 11. (10 punktów)**

W każdym z zadań **11.1-11.5** podaj w postaci uproszczonej sumę szeregu.

Za każdą poprawną odpowiedź otrzymasz **2 punkty**.

$$11.1. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n+1} \right) = \dots\dots\dots$$

$$11.2. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sqrt[n]{n} - \sqrt[n+2]{n+2} \right) = \dots\dots\dots$$

$$11.3. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sqrt[n]{n} - \sqrt[n+3]{n+3} \right) = \dots\dots\dots$$

$$11.4. \sum_{n=2}^{\infty} \left( \sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n+1} \right) = \dots\dots\dots$$

$$11.5. \sum_{n=2}^{\infty} \left( \sqrt[n]{n} - \sqrt[n+2]{n+2} \right) = \dots\dots\dots$$

**Zadanie 12. (10 punktów)**

W każdym z zadań **12.1-12.5** podaj w postaci uproszczonej normę supremum funkcji  $f$  określonej podanym wzorem w podanej dziedzinie.

Przypomnienie:  $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in D_f\}$ .

Za każdą poprawną odpowiedź otrzymasz **2 punkty**.

$$12.1. f(x) = x^2 - 5, \quad D_f = (-1, 3), \quad \|f\| = \dots\dots\dots$$

$$12.2. f(x) = x^3 - 15, \quad D_f = (-1, 3), \quad \|f\| = \dots\dots\dots$$

$$12.3. f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 5}, \quad D_f = \mathbb{R}, \quad \|f\| = \dots\dots\dots$$

$$12.4. f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 5}, \quad D_f = \mathbb{R}, \quad \|f\| = \dots\dots\dots$$

$$12.5. f(x) = \frac{1}{x^2 + 5x + 7}, \quad D_f = \mathbb{R}, \quad \|f\| = \dots\dots\dots$$

**Zadanie 13. (10 punktów)**

W każdym z zadań **13.1-13.5** zapisz w postaci przedziału zbiór wszystkich rzeczywistych wartości parametru  $p$ , dla których podany szereg jest zbieżny.

Za każdą poprawną odpowiedź otrzymasz **2 punkty**.

**13.1.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  jest zbieżny dla  $p \in \dots\dots\dots$

**13.2.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$  jest zbieżny dla  $p \in \dots\dots\dots$

**13.3.**  $\sum_{n=1}^{\infty} (2p-1)^n$  jest zbieżny dla  $p \in \dots\dots\dots$

**13.4.**  $\sum_{n=1}^{\infty} (2p+1)^n$  jest zbieżny dla  $p \in \dots\dots\dots$

**13.5.**  $\sum_{n=1}^{\infty} (3p+1)^n$  jest zbieżny dla  $p \in \dots\dots\dots$

**Zadanie 14. (10 punktów)**

W każdym z zadań **14.1-14.5** podaj w postaci uproszczonej promień zbieżności szeregu potęgowego.

Za każdą poprawną odpowiedź otrzymasz **2 punkty**.

**14.1.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n} \cdot x^n}{9^n}$ ,  $R = \dots\dots\dots$

**14.2.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n} \cdot x^{2n}}{9^n}$ ,  $R = \dots\dots\dots$

**14.3.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{3n}{n} \cdot x^{3n}}{2^n}$ ,  $R = \dots\dots\dots$

**14.4.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{3n}{n} \cdot 3^n \cdot x^{2n}$ ,  $R = \dots\dots\dots$

**14.5.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot x^n}{n^n}$ ,  $R = \dots\dots\dots$

**Zadanie 15. (10 punktów)**

Obliczyć wartość całki oznaczonej  $\int_1^3 \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x^2 - 4x + 4}}$ . Doprowadzić wynik do postaci niezawierającej „arctg”.

**Zadanie 16. (10 punktów)**

Obliczyć wartość całki niewłaściwej  $\int_{1/3}^{\infty} \frac{dx}{16x^3 + x}$ . Doprowadzić wynik do postaci  $\ln w$ , gdzie  $w$  liczbą wymierną dodatnią.

**Zadanie 21. (10 punktów)**

Obliczyć wartość całki oznaczonej  $\int_0^{\sqrt{3}} x^3 \cdot \arctg x \, dx$ . Doprowadzić wynik do postaci  $w \cdot \pi$ , gdzie  $w$  liczbą wymierną.

**Zadanie 22. (10 punktów)**

Obliczyć wartość całki oznaczonej  $\int_0^{2\pi} \sin^2 x \cdot \cos^4 x \, dx$ . Doprowadzić wynik do postaci  $w \cdot \pi$ , gdzie  $w$  liczbą wymierną.

**Zadanie 23. (10 punktów)**

Wyznaczyć obszar zbieżności zespolonego szeregu potęgowego  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{8n}}{16^n \cdot n}$ .  
Podać w postaci kartezjańskiej liczby zespolone użyte do opisanie obszaru zbieżności.

**Zadanie 24. (10 punktów)**

Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p \cdot \sum_{k=1}^{55n} \sqrt{\sqrt{n} + \sqrt{9n+k}}$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej parametru  $p$ , aby granica ta była dodatnia i skończona.

**Zadanie 25. (10 punktów)**

Obliczyć sumę szeregu  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4 + 4}$ .

**Zadanie 26. (10 punktów)**

Dana jest taka funkcja ciągła  $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ , że

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \leq 2 \quad \text{oraz} \quad \int_{-\infty}^{\infty} (f(x))^3 dx \leq 8.$$

Dowieść, że

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f(x))^2 dx \leq C,$$

gdzie  $C = 5$  (wersja łatwiejsza za 5 punktów)  
lub  $C = 4$  (wersja trudniejsza za 10 punktów).

**Zadanie 31. (10 punktów)**

Rozstrzygnąć, czy wartość całki oznaczonej

$$\int_7^8 \sqrt[3]{x^2 + 15} dx \approx 4,146$$

jest mniejsza czy większa od  $199/48 \approx 4,146$ .

**Zadanie 32. (10 punktów)**

Podać przykład takiego szeregu zbieżnego  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  o wyrazach dodatnich, że szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{a_n}{n}}$  jest rozbieżny.

**Zadanie 33. (10 punktów)**

Podać przykład takiego ciągu  $(a_n)$ , że szeregi  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^5$  i  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^9$  są zbieżne, a szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^7$  jest rozbieżny.

**Zadanie 34. (10 punktów)**

Podać przykład takiej funkcji ciągłej  $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ , że całka

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

jest zbieżna, ale całka

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \sqrt{f(x)} dx$$

jest rozbieżna.

Zadanie **35.** (10 punktów)

W każdym z zadań **35.1-35.10** podaj w postaci uproszczonej wartość całki oznaczonej. Za każdą poprawną odpowiedź otrzymasz **1 punkt**.

$$A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{4^n},$$

$$B(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{5^n},$$

$$C(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{10^n},$$

$$D(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx}{10^n}.$$

---

$$\mathbf{35.1.} \quad \int_0^{2\pi} A(x)^2 dx = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{35.2.} \quad \int_0^{2\pi} B(x)^2 dx = \dots\dots\dots$$

---

$$\mathbf{35.3.} \quad \int_0^{2\pi} C(x)^2 dx = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{35.4.} \quad \int_0^{2\pi} D(x)^2 dx = \dots\dots\dots$$

---

$$\mathbf{35.5.} \quad \int_0^{2\pi} A(x)B(x) dx = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{35.6.} \quad \int_0^{2\pi} A(x)C(x) dx = \dots\dots\dots$$

---

$$\mathbf{35.7.} \quad \int_0^{2\pi} A(x)D(x) dx = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{35.8.} \quad \int_0^{2\pi} B(x)C(x) dx = \dots\dots\dots$$

---

$$\mathbf{35.9.} \quad \int_0^{2\pi} B(x)D(x) dx = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{35.10.} \quad \int_0^{2\pi} C(x)D(x) dx = \dots\dots\dots$$

---

**Zadanie 36. (10 punktów)**

W każdym z zadań **36.1-36.10** podaj w postaci uproszczonej wartość całki oznaczonej. Za każdą poprawną odpowiedź otrzymasz **1 punkt**.

Wskazówka:  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx + i \sin nx}{n!} = e^{\cos x} \cdot (\operatorname{cossin} x + i \operatorname{sinsin} x)$ .

---


$$\mathbf{36.1.} \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cdot \operatorname{cossin} x \cdot \cos x \, dx = \dots\dots\dots$$


---

$$\mathbf{36.2.} \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cdot \operatorname{cossin} x \cdot \cos 2x \, dx = \dots\dots\dots$$


---

$$\mathbf{36.3.} \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cdot \operatorname{cossin} x \cdot \cos 3x \, dx = \dots\dots\dots$$


---

$$\mathbf{36.4.} \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cdot \operatorname{cossin} x \cdot \cos 4x \, dx = \dots\dots\dots$$


---

$$\mathbf{36.5.} \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cdot \operatorname{cossin} x \cdot \cos 5x \, dx = \dots\dots\dots$$


---

$$\mathbf{36.6.} \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cdot \operatorname{sinsin} x \cdot \sin x \, dx = \dots\dots\dots$$


---

$$\mathbf{36.7.} \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cdot \operatorname{sinsin} x \cdot \sin 2x \, dx = \dots\dots\dots$$


---

$$\mathbf{36.8.} \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cdot \operatorname{sinsin} x \cdot \sin 3x \, dx = \dots\dots\dots$$


---

$$\mathbf{36.9.} \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cdot \operatorname{sinsin} x \cdot \sin 4x \, dx = \dots\dots\dots$$


---

$$\mathbf{36.10.} \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cdot \operatorname{sinsin} x \cdot \sin 5x \, dx = \dots\dots\dots$$


---