

KOŁOKWIUM nr 4, 21.03.2019, godz. 12:15–13:00**Zadanie 6.** (10 punktów)

Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int_0^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x \, dx$. Pamiętać o uproszczeniu wyniku.

Rozwiązanie:

Dopisujemy czynnik 1 i całkujemy przez części:

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x \, dx &= \int_0^{\sqrt{3}} 1 \cdot \operatorname{arctg} x \, dx = x \cdot \operatorname{arctg} x \Big|_{x=0}^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} x \cdot \frac{1}{x^2+1} \, dx = \\ &= \sqrt{3} \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{3} - 0 \cdot \operatorname{arctg} 0 - \left(\frac{\ln(x^2+1)}{2} \Big|_{x=0}^{\sqrt{3}} \right) = \sqrt{3} \cdot \frac{\pi}{3} - \left(\frac{\ln 4}{2} - \frac{\ln 1}{2} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln 2. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Wartość podanej całki oznaczonej jest równa $\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln 2$.

Zadanie 7. (10 punktów)

Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int_2^{98} \frac{dx}{x + \sqrt{x+2}}$.

Doprowadzić wynik do postaci $w \cdot \ln p$, gdzie p jest liczbą pierwszą, a w liczbą wymierną.

Rozwiązanie:

Wykonujemy podstawienie $t = \sqrt{x+2}$, czyli $x = t^2 - 2$ i formalnie $dx = 2t dt$. Wówczas przy x przebiegającym przedział $[2, 98]$ zmienna t przebiega przedział $[2, 10]$. Otrzymujemy

$$\int_2^{98} \frac{dx}{x + \sqrt{x+2}} = \int_2^{10} \frac{2t dt}{t^2 - 2 + t} = \int_2^{10} \frac{2t dt}{t^2 + t - 2} = \int_2^{10} \frac{2t dt}{(t-1) \cdot (t+2)}.$$

Rozkładamy funkcję podcałkową na ułamki proste:

$$\frac{2t}{(t-1) \cdot (t+2)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+2},$$

$$2t = A \cdot (t+2) + B \cdot (t-1),$$

$$\text{dla } t = -2 \quad -4 = B \cdot (-3), \quad \text{skąd } B = 4/3,$$

$$\text{dla } t = 1 \quad 2 = A \cdot 3, \quad \text{skąd } A = 2/3.$$

Kontynuujemy całkowanie (nie piszemy modułu pod znakiem logarytmu, bo argument logarytmu jest dodatni w przedziale całkowania):

$$\begin{aligned} \int_2^{10} \frac{2t dt}{(t-1) \cdot (t+2)} &= \int_2^{10} \frac{2/3}{t-1} + \frac{4/3}{t+2} dt = \frac{2}{3} \cdot \ln(t-1) + \frac{4}{3} \cdot \ln(t+2) \Big|_{t=2}^{10} = \\ &= \frac{2}{3} \cdot \ln 9 + \frac{4}{3} \cdot \ln 12 - \frac{2}{3} \cdot \ln 1 - \frac{4}{3} \cdot \ln 4 = \frac{4}{3} \cdot \ln 3 + \frac{4}{3} \cdot (\ln 4 + \ln 3) - \frac{2}{3} \cdot 0 - \frac{4}{3} \cdot \ln 4 = \frac{8}{3} \cdot \ln 3. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Wartość podanej całki oznaczonej jest równa $\frac{8}{3} \cdot \ln 3$.