

KOŁOKWIUM nr 7, 11.04.2019, godz. 12:15–13:00**Zadanie 11.** (10 punktów)Rozstrzygnąć, czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{7^n + \binom{2n}{n}^2}}{3^n}$ jest zbieżny.*Rozwiązanie:*

Korzystamy z kryterium porównawczego, a następnie z kryterium d'Alemberta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{7^n + \binom{2n}{n}^2}}{3^n} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{0 + \binom{2n}{n}^2}}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{3^n},$$

$$\frac{\binom{2n+2}{n+1}}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{\binom{2n}{n}} = \frac{(2n+2)! \cdot (n!)^2}{3 \cdot ((n+1)!)^2 \cdot (2n)!} = \frac{(2n+1) \cdot (2n+2)}{3 \cdot (n+1)^2} \rightarrow \frac{4}{3} > 1,$$

a zatem na mocy kryterium d'Alemberta szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{3^n}$ jest rozbieżny, a stąd na mocykryterium porównawczego rozbieżny jest także szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{7^n + \binom{2n}{n}^2}}{3^n}$.**Odpowiedź:** Podany szereg jest rozbieżny.**Uwaga:** Jeżeli konkluzja jest błędna (szereg zbieżny) lub brak jest konkluzji co do zbieżności szeregu, **ocena za zadanie nie może być wyższa niż 4 punkty.**

Zadanie 12. (5+5=10 punktów)

a) Rozstrzygnąć, czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^{20}+n^8} - n^{10})$ jest zbieżny.

Rozwiązanie:

Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia (na różnicę kwadratów), a następnie wykonujemy szacowanie, aby skorzystać z kryterium porównawczego:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^{20}+n^8} - n^{10}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^8}{\sqrt{n^{20}+n^8} + n^{10}} \leqslant \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^8}{\sqrt{n^{20}+0} + n^{10}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^8}{2n^{10}} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Podany szereg jest zbieżny.

b) Rozstrzygnąć, czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^{20}+n^9} - n^{10})$ jest zbieżny.

Rozwiązanie:

Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia (na różnicę kwadratów), a następnie wykonujemy szacowanie, aby skorzystać z kryterium porównawczego:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^{20}+n^9} - n^{10}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^9}{\sqrt{n^{20}+n^9} + n^{10}} \geqslant \\ &\geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^9}{\sqrt{n^{20}+3n^{20}} + n^{10}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^9}{3n^{10}} = \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Podany szereg jest rozbieżny.