

KOŁOKWIUM nr 81, 30.04.2019, godz. 8:15–10:00**Zadanie 81.** (1000 punktów do podziału)

Dana jest taka funkcja ciągła $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$, że całki

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \quad \text{oraz} \quad \int_{-\infty}^{\infty} (f(x))^3 dx$$

są zbieżne. Dowieść, że całka

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f(x))^2 dx$$

jest zbieżna.

Rozwiązanie:

Z nierówności między średnimi geometryczną i arytmetyczną, po skorzystaniu z kryterium porównawczego dla całek niewłaściwych, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (f(x))^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{f(x) \cdot (f(x))^3} dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x) + (f(x))^3}{2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx + \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (f(x))^3 dx < +\infty. \end{aligned}$$

Zadanie 82. (1000 punktów do podziału)

Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt[4]{1} + \sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{4} + \sqrt[4]{5} + \dots + \sqrt[4]{n-3} + \sqrt[4]{n-2} + \sqrt[4]{n-1} + \sqrt[4]{n}\right)^k}{\left(\sqrt[8]{1} + \sqrt[8]{2} + \sqrt[8]{3} + \sqrt[8]{4} + \sqrt[8]{5} + \dots + \sqrt[8]{n-3} + \sqrt[8]{n-2} + \sqrt[8]{n-1} + \sqrt[8]{n}\right)^m}$$

dla tak dobranych względnie pierwszych liczb naturalnych k i m , aby granica ta była liczbą rzeczywistą dodatnią.

Rozwiązanie:

Oczekujemy, że suma występująca w liczniku jest rzędu wielkości $n^{5/4}$, gdyż mamy tam n składników, a większość z nich jest rzędu $n^{1/4}$.

Zauważmy, że

$$n^{-5/4} \cdot \sum_{i=1}^n \sqrt[4]{i} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \sqrt[4]{\frac{i}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right),$$

gdzie $f(x) = \sqrt[4]{x}$.

Ponieważ funkcja f jest całkowalna jako funkcja ciągła, jej sumy Riemanna odpowiadające ciągowi podziałów przedziału $[0, 1]$ na n przedziałów równej długości $1/n$ dążą do całki oznaczonej:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \sqrt[4]{x} dx = \frac{4x^{5/4}}{5} \Big|_{x=0}^1 = \frac{4}{5}.$$

Analogicznie oczekujemy, że suma występująca w mianowniku jest rzędu wielkości $n^{9/8}$, gdyż mamy tam n składników, a większość z nich jest rzędu $n^{1/8}$.

Zauważmy, że

$$n^{-9/8} \cdot \sum_{i=1}^n \sqrt[8]{i} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \sqrt[8]{\frac{i}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n g\left(\frac{i}{n}\right),$$

gdzie $g(x) = \sqrt[8]{x}$.

Ponieważ funkcja g jest całkowalna jako funkcja ciągła, jej sumy Riemanna odpowiadające ciągowi podziałów przedziału $[0, 1]$ na n przedziałów równej długości $1/n$ dążą do całki oznaczonej:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n g\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 \sqrt[8]{x} dx = \frac{8x^{9/8}}{9} \Big|_{x=0}^1 = \frac{8}{9}.$$

Wobec tego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sum_{i=1}^n \sqrt[4]{i}\right)^k}{\left(\sum_{i=1}^n \sqrt[8]{i}\right)^m} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^{5k/4-9m/8} \cdot \frac{\left(n^{-5/4} \cdot \sum_{i=1}^n \sqrt[4]{i}\right)^k}{\left(n^{-9/8} \cdot \sum_{i=1}^n \sqrt[8]{i}\right)^m} \right) = \frac{(4/5)^k}{(8/9)^m},$$

o ile $5k/4 = 9m/8$, czyli $k = 9$ i $m = 10$.

Dla tych wartości k i m szukana granica jest równa $\frac{4^9 \cdot 9^{10}}{5^9 \cdot 8^{10}} = \frac{3^{20}}{2^{12} \cdot 5^9}$.

Odpowiedź: Dana w zadaniu granica ciągu jest równa $\frac{3^{20}}{2^{12} \cdot 5^9}$ dla $k = 9$ i $m = 10$.

Zadanie 83. (1000 punktów do podziału)

Obliczyć

$$\left[\sum_{n=1}^{10^{10}} \frac{1}{n^{1,1}} \right],$$

gdzie $[y]$ oznacza część całkowitą liczby y .*Rozwiązanie:*

W rozwiązaniu skorzystamy z nierówności (zrób rysunek):

$$\sum_{n=2}^{10^{10}} \frac{1}{n^{1,1}} < \int_1^{10^{10}} \frac{dx}{x^{1,1}} < \sum_{n=1}^{10^{10}-1} \frac{1}{n^{1,1}},$$

gdzie

$$\int_1^{10^{10}} \frac{dx}{x^{1,1}} = -\frac{10}{x^{0,1}} \Big|_{x=1}^{10^{10}} = -1 + 10 = 9.$$

Z lewej nierówności otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{10^{10}} \frac{1}{n^{1,1}} = 1 + \sum_{n=2}^{10^{10}} \frac{1}{n^{1,1}} < 1 + \int_1^{10^{10}} \frac{dx}{x^{1,1}} = 1 + 9 = 10.$$

Z kolei prawa nierówność prowadzi do

$$\sum_{n=1}^{10^{10}} \frac{1}{n^{1,1}} = \frac{1}{10^{10}} + \sum_{n=1}^{10^{10}-1} \frac{1}{n^{1,1}} > \frac{1}{10^{10}} + \int_1^{10^{10}} \frac{dx}{x^{1,1}} = \frac{1}{10^{10}} + 9 > 9.$$

Wobec tego

$$9 < \sum_{n=1}^{10^{10}} \frac{1}{n^{1,1}} < 10.$$

Odpowiedź: Podana liczba jest równa 9.

Zadanie 84. (1000 punktów do podziału)

Rozstrzygnąć, czy wartość całki oznaczonej

$$\int_{36}^{37} \sqrt[3]{x^2 + 432} dx \approx \mathbf{12,08333}$$

jest mniejsza czy większa od $145/12 \approx \mathbf{12,08333}$.*Rozwiązanie:*Oznaczmy przez f funkcję podcałkową:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 432}.$$

Wówczas

$$f'(x) = \frac{2x}{3 \cdot (x^2 + 432)^{2/3}}$$

oraz

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2}{3 \cdot (x^2 + 432)^{2/3}} - \frac{8x^2}{9 \cdot (x^2 + 432)^{5/3}} = \frac{6 \cdot (x^2 + 432)}{9 \cdot (x^2 + 432)^{5/3}} - \frac{8x^2}{9 \cdot (x^2 + 432)^{5/3}} = \\ &= \frac{6x^2 + 6 \cdot 432 - 8x^2}{9 \cdot (x^2 + 432)^{5/3}} = \frac{-2x^2 + 2 \cdot 36^2}{9 \cdot (x^2 + 432)^{5/3}} = \frac{2 \cdot (-x^2 + 36^2)}{9 \cdot (x^2 + 432)^{5/3}} < 0 \end{aligned}$$

dla $x > 36$, skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wklęsła w przedziale $[36, \infty)$.Zatem wykres funkcji f dla $x > 36$ leży poniżej prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie 36. Ponieważ $f(36) = 12$ oraz $f'(36) = 1/6$, dla $x > 36$ zachodzi nierówność $f(x) < 12 + (x - 36)/6$ i w konsekwencji

$$\int_{36}^{37} \sqrt[3]{x^2 + 432} dx < \int_{36}^{37} 12 + \frac{x - 36}{6} dx = 12 + \frac{1}{12} = \frac{145}{12}.$$

Wartość ostatniej całki można obliczyć całkując bezpośrednio albo interpretując ją geometrycznie jako pole odpowiedniego trapezu.

Odpowiedź: Wartość podanej całki oznaczonej jest mniejsza od $145/12$.