

KOŁOKWIUM nr 82, 21.05.2019, godz. 8:15–10:00**Zadanie 85.** (1000 punktów do podziału)

W każdym z zadań **85.1–85.8** podaj wartość parametru p , dla której podana granica jest dodatnia i skończona oraz podaj wartość granicy dla tej wartości parametru p .

$$85.1. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^p \cdot \sum_{k=1}^n \sqrt{k} \right) = \frac{2}{3} \quad \text{dla } p = -\frac{3}{2}$$

$$85.2. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^p \cdot \sum_{k=1}^{4n} \sqrt{k} \right) = \frac{16}{3} \quad \text{dla } p = -\frac{3}{2}$$

$$85.3. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^p \cdot \sum_{k=1}^n k\sqrt{k} \right) = \frac{2}{5} \quad \text{dla } p = -\frac{5}{2}$$

$$85.4. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^p \cdot \sum_{k=1}^n \sqrt[3]{k} \right) = \frac{3}{4} \quad \text{dla } p = -\frac{4}{3}$$

$$85.5. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^p \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \right) = \ln 2 \quad \text{dla } p = 0$$

$$85.6. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^p \cdot \sum_{k=1}^{4n} \frac{1}{n+k} \right) = \ln 5 \quad \text{dla } p = 0$$

$$85.7. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^p \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^2} \right) = \frac{1}{2} \quad \text{dla } p = 1$$

$$85.8. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^p \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^3} \right) = \frac{3}{8} \quad \text{dla } p = 2$$

Zadanie 86. (1000 punktów do podziału)

W każdym z zadań **86.1–86.8** podaj w postaci uproszczonej wartość całki oznaczonej.

Wskazówka: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{p^n} = \frac{p \cdot \sin x}{p^2 + 1 - 2p \cdot \cos x}$ dla $p > 1$.

$$86.1. \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x \, dx}{5 - 4\cos x} = \frac{\pi}{4}$$

$$86.2. \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x \, dx}{5 - 3\cos x} = \frac{2\pi}{9}$$

$$86.3. \int_0^{2\pi} \frac{\sin x \cdot \sin 2x \, dx}{5 - 4\cos x} = \frac{\pi}{8}$$

$$86.4. \int_0^{2\pi} \frac{\sin x \cdot \sin 2x \, dx}{5 - 3\cos x} = \frac{2\pi}{27}$$

$$86.5. \int_0^{2\pi} \frac{\sin x \cdot \sin 3x \, dx}{5 - 4\cos x} = \frac{\pi}{16}$$

$$86.6. \int_0^{2\pi} \frac{\sin x \cdot \sin 3x \, dx}{5 - 3\cos x} = \frac{2\pi}{81}$$

$$86.7. \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x \, dx}{13 - 5\cos x} = \frac{2\pi}{25}$$

$$86.8. \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x \, dx}{17 - 8\cos x} = \frac{\pi}{16}$$

Zadanie 87. (1000 punktów do podziału)

W każdym z zadań **87.1–87.8** podaj w postaci uproszczonej wartość całki oznaczonej.

$$87.1. \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x \, dx}{(5 - 4\cos x)^2} = \frac{\pi}{12}$$

$$87.2. \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x \, dx}{(5 - 3\cos x)^2} = \frac{\pi}{18}$$

$$87.3. \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x \, dx}{(13 - 5\cos x)^2} = \frac{\pi}{150}$$

$$87.4. \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x \, dx}{(17 - 8\cos x)^2} = \frac{\pi}{240}$$

$$87.5. \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x \, dx}{(5 - 4\cos x) \cdot (5 - 3\cos x)} = \frac{\pi}{15}$$

$$87.6. \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x \, dx}{(13 - 5\cos x) \cdot (17 - 8\cos x)} = \frac{\pi}{190}$$

$$87.7. \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x \, dx}{(5 - 4\cos x) \cdot (13 - 5\cos x)} = \frac{\pi}{45}$$

$$87.8. \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x \, dx}{(5 - 3\cos x) \cdot (13 - 5\cos x)} = \frac{2\pi}{105}$$

Zadanie 88. (1000 punktów do podziału)

Podać przykład takiej funkcji ciągłej $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$, że całka

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

jest zbieżna, ale całka

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f(x))^2 dx$$

jest rozbieżna.

Rozwiązanie:

Wykresem funkcji f są ramiona opisanych niżej trójkątów równoramiennych, a poza tym f jest równa 0.

Trójkąty są parametryzowane liczbami naturalnymi n . Trójkąt o numerze n ma wierzchołki o następujących współrzędnych:

$$\left(n - \frac{1}{8^n}, 0\right), \quad \left(n + \frac{1}{8^n}, 0\right), \quad (n, 4^n).$$

Pole n -tego trójkąta jest równe $\frac{1}{2^n}$, skąd

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

Wykres funkcji f^2 stanowią trójkąty paraboliczne (o ramionach będących fragmentami paraboli). Wysokość n -tego trójkąta parabolicznego jest równa 16^n , a jego pole

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8^n} \cdot 16^n,$$

skąd

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f(x))^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 2^n}{3} = +\infty.$$