

KOŁOKWIUM nr 9, 16.05.2019, godz. 12:15–13:00**Zadanie 15.** (10 punktów)

$$\text{Niech } f_n(x) = \frac{\cos(n^3 \cdot x)}{n^{20}}.$$

Wskazując odpowiednią liczbę całkowitą dodatnią k udowodnić, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$ jest jednostajnie zbieżny, ale szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k+1)}$ nie jest jednostajnie zbieżny.

Rozwiązanie:

Najpierw zauważmy, że

$$f_n^{(k)}(x) = \frac{n^{3k} \cdot j\sin(n^3 \cdot x)}{n^{20}} = \frac{j\sin(n^3 \cdot x)}{n^{20-3k}},$$

gdzie $j\sin$ jest jedną z funkcji $\pm\sin$ lub $\pm\cos$. Zatem

$$\|f_n^{(k)}\| = \frac{1}{n^{20-3k}} = n^{3k-20}.$$

Jeżeli szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n^{(k)}\|$ jest zbieżny, to szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$ jest jednostajnie zbieżny.

Ponieważ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n^{(k)}\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{20-3k}},$$

szereg ten jest zbieżny, o ile $20 - 3k > 1$, czyli dla $k \leq 6$.

W szczególności szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(6)}$ jest jednostajnie zbieżny.

Jeżeli $\|f_n^{(k)}\| \not\rightarrow 0$ przy $n \rightarrow \infty$, to szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$ nie jest jednostajnie zbieżny.

Taką sytuację mamy np. dla $k = 7$, gdzie

$$\|f_n^{(7)}\| = n \rightarrow \infty.$$

Wobec tego szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(7)}$ nie jest jednostajnie zbieżny.

Odpowiedź: Warunki zadania są spełnione przez $k = 6$.

Zadanie 16. (13 punktów)

Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int_0^5 \frac{dx}{x^2 - 4x + 5}$ (**8 punktów**), a następnie doprowadzić wynik do postaci $w\pi$, gdzie w jest liczbą wymierną (**5 punktów**).

Rozwiązanie:

Wykonując podstawienie $t = x - 2$ i formalnie $dx = dt$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_0^5 \frac{dx}{x^2 - 4x + 5} &= \int_0^5 \frac{dx}{(x-2)^2 + 1} = \int_{-2}^3 \frac{dt}{t^2 + 1} = \operatorname{arctg} t \Big|_{t=-2}^3 = \operatorname{arctg} 3 - \operatorname{arctg} (-2) = \\ &= \operatorname{arctg} 3 + \operatorname{arctg} 2 = \arg(1 + 3i) + \arg(1 + 2i) = \arg((1 + 3i)(1 + 2i)) = \arg(-5 + 5i) = \frac{3\pi}{4}. \end{aligned}$$

Należy zauważyć, że ze względu na niejednoznaczność argumentu mogliśmy popełnić błąd będący wielokrotnością 2π . Jednak ze względu na oszacowania

$$\frac{\pi}{4} < \operatorname{arctg} 2 < \frac{\pi}{2}$$

oraz

$$\frac{\pi}{4} < \operatorname{arctg} 3 < \frac{\pi}{2}$$

otrzymujemy

$$\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3 < \pi,$$

co pokazuje, że otrzymany wynik jest poprawny (dodanie lub odjęcie 2π wyprowadziłoby go poza otrzymane powyżej oszacowania).

Odpowiedź: Podana całka ma wartość $3\pi/4$.