

Kolokwium nr 1: czwartek 28.02.2019, godz. 12:15–13:00 (sala HS), materiał zad. 1–32.

Całka nieoznaczona – podstawy. Całkowanie przez części.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach we wtorek 26.02.2019 (9:15-12:00).

Grupa 1: każdy idzie do sali EM lub HS (w/g własnego wyboru).

Grupa 2 ma zajęcia w sali EM (jak zawsze).

Grupa 3 ma zajęcia w sali HS (wyjątkowo).

1. Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje n -krotnie różniczkowalne $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że $f^{(n)}(x) = 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

2. Funkcja różniczkowalna $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunek $f'(x) = \frac{1}{x^2}$ dla każdego $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, a ponadto wiadomo, że $f(1) = 0$. Co można wywnioskować o $f(2)$ oraz o $f(-1)$?

3. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje dwukrotnie różniczkowalne $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, że dla każdego $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zachodzi równość $f''(x) = \frac{1}{x^3}$.

4. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje dwukrotnie różniczkowalne $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, że dla każdego $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zachodzi równość $f''(x) = \frac{1}{x^3}$, a przy tym $f(1) = f'(1) = 0$.

5. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje dwukrotnie różniczkowalne $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, że dla każdego $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zachodzi równość $f''(x) = \frac{1}{x^3}$, a przy tym $f(1) = f(2) = 0$.

6. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje dwukrotnie różniczkowalne $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, że dla każdego $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zachodzi równość $f''(x) = \frac{1}{x^3}$, a przy tym $f(1) = f(-2) = 0$.

7. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje dwukrotnie różniczkowalne $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, że dla każdego $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zachodzi równość $f''(x) = \frac{1}{x^3}$, a przy tym spełniony jest warunek $f(1) = f(2) = f(-2) = 0$.

8. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje 2019-krotnie różniczkowalne $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że $f^{(2019)}(x) = e^{3x}$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

9. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje 2019-krotnie różniczkowalne $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że $f^{(2019)}(x) = \sin^2 x$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

10. Wyznaczyć wszystkie funkcje ciągłe $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, różniczkowalne na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, spełniające dla każdego $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ warunek $f'(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x^2}}$.

11. Wyznaczyć wszystkie funkcje ciągłe $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, które są dwukrotnie różniczkowalne na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ i spełniają dla każdego $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ warunek $f''(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x^2}}$. Wskazać wśród nich funkcję spełniającą dodatkowy warunek $f(-1) = f(1) = f(4) = 0$.

12. Na wyspach Bergamutach podobno jest kot w butach i podobno zamiast zwykłych funkcji trygonometrycznych używają tam funkcji *losinus*, *nosinus* oraz *sosinus* podlegających następującym regułom różniczkowania:

$$\frac{d}{dx} \text{los } x = \text{nos } x, \quad \frac{d}{dx} \text{nos } x = \text{sos } x, \quad \frac{d}{dx} \text{sos } x = \text{los } x.$$

Wyznaczyć wszystkie funkcje 2019-krotnie różniczkowalne $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające warunek $f^{(2019)}(x) = \text{los}(2019x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Obliczyć $\int f(x)dx$, jeśli $f(x)$ dana jest wzorem:

13. $5\pi^4$ **14.** $\sin^3 e$ **15.** $|x|$ **16.** $\sqrt{x^4 + 2x^2 + 1}$ **17.** $\sqrt{x^4 - 2x^2 + 1}$

18. $x \cdot \sin 3x$ **19.** $x \cdot e^{-x}$ **20.** $x^n \cdot \ln x, n \in \mathbb{N}$ **21.** $x^3 \cdot e^{5x}$

22. $x \cdot \sin x \cdot \cos x$ **23.** $e^{3x} \cdot \sin^2 2x$ **24.** $e^{5x} \cdot \sin 3x$ **25.** $e^{5x} \cdot \cos 3x$

26. $\sin 3x \cdot \sin 5x$ **27.** $\sin 15x \cdot e^{-4x}$ **28.** $x \cdot (x-1)^{5/4}$ **29.** $\frac{x}{\sqrt{x+7}}$

30. Funkcja ciągła $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna na zbiorze $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, a jej pochodna drugiego rzędu jest dana wzorem

$$f''(x) = 6x + 6 \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Ponadto wiadomo, że $f(x) = x$ dla $x \in \{-1, 0, 2\}$. Wyznaczyć $f(3)$.

31. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$J(x) = \int x^2 \cdot \sqrt[3]{x+1} dx.$$

Sprawdzić, że $J(1) = J(-1) + \frac{33\sqrt[3]{2}}{70}$, a jeśli tak nie jest, poszukać błędu rachunkowego.

32. Funkcja ciągła $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna na zbiorze $\mathbb{R} \setminus \{3\}$, a jej pochodna drugiego rzędu jest dana wzorem

$$f''(x) = 2 \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}.$$

Ponadto wiadomo, że $f(x) = x$ dla $x \in \{0, 2, 4\}$. Wyznaczyć $f(5)$.