

Zadania do omówienia na ćwiczeniach we wtorek 7.05.2019 (9:15-12:00).

Grupa 1 ma zajęcia w sali HS, grupa 2 ma zajęcia w sali EM, grupa 3 ma zajęcia w sali A.

Szeregi trygonometryczne.**Szeregi Fouriera**

Szeregiem Fouriera funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o okresie 2π , całkowalnej na przedziale długości 2π , nazywamy szereg

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

gdzie

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_A^{A+2\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_A^{A+2\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_A^{A+2\pi} f(x) \sin nx dx.$$

Powyższe całki nie zależą od wyboru dolnej granicy przedziału całkowania.

Jeżeli ponadto funkcja f jest przedziałami monotoniczna oraz dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość

$$f(x) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2},$$

to f jest (punktowo) sumą swojego szeregu Fouriera.

Równość Parsewala:

$$\int_A^{A+2\pi} f(x)^2 dx = 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

Wyznaczyć szereg Fouriera funkcji

329. $f(x) = x$ dla $x \in (-\pi, \pi)$

330. $f(x) = |x|$ dla $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$

331. $f(x) = x^2$ dla $x \in (-\pi, \pi)$

332. $f(x) = x^2$ dla $x \in (0, 2\pi)$

333. $f(x) = x^2$ dla $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$

334. $f(x) = e^x$ dla $x \in (-\pi, \pi)$

335. $f(x) = |\sin x|$ dla $x \in (0, 2\pi)$

336. $f(x) = e^{|x|}$ dla $x \in (-\pi, \pi)$

337. $f(x) = \sin \frac{3}{2}x$ dla $x \in (0, 2\pi)$

338. $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{dla } x \in (0, \pi) \\ \cos x & \text{dla } x \in (\pi, 2\pi) \end{cases}$

339. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \in (0, \pi) \\ 0 & \text{dla } x \in (\pi, 2\pi) \end{cases}$

340. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } 0 < x < \pi/2 \\ 1 & \text{dla } \pi/2 < x < 2\pi \end{cases}$

341. Obliczyć $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-2}$ wstawiając $x=0$ do szeregu Fouriera funkcji f określonej wzorem $f(x) = \cos(x\sqrt{2})$ na $(0, 2\pi)$.

342. Obliczyć $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$ używając $f(x) = x(\pi - |x|)$ na $(-\pi, \pi)$.

343. Obliczyć wartość sumy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2}$. Wolno skorzystać z gotowych wartości całek:

$$\int_0^{2\pi} e^{x\sqrt{2}} dx = \frac{e^{2\pi\sqrt{2}} - 1}{\sqrt{2}},$$

$$\int_0^{2\pi} e^{2x\sqrt{2}} dx = \frac{e^{4\pi\sqrt{2}} - 1}{2\sqrt{2}},$$

$$\int_0^{2\pi} e^{x\sqrt{2}} \cos nx dx = (e^{2\pi\sqrt{2}} - 1) \cdot \frac{\sqrt{2}}{n^2 + 2},$$

$$\int_0^{2\pi} e^{x\sqrt{2}} \sin nx dx = (e^{2\pi\sqrt{2}} - 1) \cdot \frac{-n}{n^2 + 2}.$$

W miarę możliwości rozwiązać zadanie dwoma sposobami i porównać wyniki. Dla czytelności przeprowadzanych rachunków oraz podanej odpowiedzi można użyć oznaczeń:

$$A = e^{2\pi\sqrt{2}} - 1 \quad \text{oraz} \quad B = e^{2\pi\sqrt{2}} + 1.$$

Zadania do omówienia na ćwiczeniach we wtorek 7.05.2019 (8:15-9:00 sala HS).

854. Niech $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$ oraz $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{3^n}$. Zakładając pełną beztróskę w manipulowaniu szeregami funkcyjnymi, obliczyć wartość całki $\int_0^{2\pi} f(x)g(x) dx$.

W kolejnych dwóch zadaniach zakładamy, że funkcja f jest na tyle regularna, że nie ma problemu z obliczeniem współczynników jej szeregu Fouriera, a przy tym f jest sumą swojego szeregu Fouriera.

855. Dowieść, że jeśli f jest funkcją okresową o okresie π , to w jej szeregu Fouriera $a_n = b_n = 0$ dla n nieparzystych.

856. Dowieść, że jeśli f jest funkcją okresową o okresie $\frac{\pi}{2}$, to w jej szeregu Fouriera $a_n = b_n = 0$ dla n niepodzielnych przez 4.

857. W każdym z zadań **857.1-857.21** podaj w postaci uproszczonej wartość całki (jako liczbę wymierną lub jako iloczyn liczby wymiernej i liczby π).

$$\begin{aligned} A(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n}, & B(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{3^n}, & C(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{3^n}, \\ D(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 3nx}{10^n}, & E(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(3n+1)x}{10^n}, & F(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(3n+2)x}{10^n}. \end{aligned}$$

$$\mathbf{857.1.} \quad \int_0^{2\pi} A(x)^2 dx = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{857.2.} \quad \int_0^{2\pi} B(x)^2 dx = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{857.3.} \quad \int_0^{2\pi} C(x)^2 dx = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{857.4.} \quad \int_0^{2\pi} D(x)^2 dx = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{857.5.} \quad \int_0^{2\pi} E(x)^2 dx = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{857.6.} \quad \int_0^{2\pi} F(x)^2 dx = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{857.7.} \quad \int_0^{2\pi} A(x)B(x) dx = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{857.8.} \quad \int_0^{2\pi} A(x)C(x) dx = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{857.9.} \quad \int_0^{2\pi} A(x)D(x) dx = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{857.10.} \quad \int_0^{2\pi} A(x)E(x) dx = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{857.11.} \quad \int_0^{2\pi} A(x)F(x) dx = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{857.12.} \quad \int_0^{2\pi} B(x)C(x) dx = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{857.13.} \quad \int_0^{2\pi} B(x)D(x) dx = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{857.14.} \quad \int_0^{2\pi} B(x)E(x) dx = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{857.15.} \quad \int_0^{2\pi} B(x)F(x) dx = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{857.16.} \quad \int_0^{2\pi} C(x)D(x) dx = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{857.17.} \quad \int_0^{2\pi} C(x)E(x) dx = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{857.18.} \quad \int_0^{2\pi} C(x)F(x) dx = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{857.19.} \quad \int_0^{2\pi} D(x)E(x) dx = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{857.20.} \quad \int_0^{2\pi} D(x)F(x) dx = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{857.21.} \quad \int_0^{2\pi} E(x)F(x) dx = \dots\dots\dots$$
