

Kolokwium nr 9: czwartek 16.05.2019, godz. 12:15–13:00 (sala HS), materiał zad. 1–390.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach we wtorek 14.05.2019 (9:15–12:00).

Grupa 1 ma zajęcia w sali HS, grupa 2 ma zajęcia w sali EM, grupa 3 ma zajęcia w sali A.

Liczby zespolone i ich zastosowanie do wyprowadzania tożsamości trygonometrycznych.

344. Sprawdzić, że

$$\sqrt{a+bi} = \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i \operatorname{sgn}(b) \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \right),$$

jeśli $b \neq 0$.

Rozwiązać równania i układy równań:

345. $\bar{z} = z^2$ **346.** $\bar{z} = z^{-1}$ **347.** $1+i = z^2$ **348.** $3+4i = z^2$ **349.** $z^2 \bar{z} = 8i$

350. $-3+4i = z^2$ **351.** $z^2 + z = i$ **352.** $z^2 + iz = 1$ **353.** $z = \bar{z} + 1$

354. $\begin{cases} z_1^2 = z_2 \\ z_2^2 = z_1 \end{cases}$ **355.** $\begin{cases} z_1^2 + z_2^2 = 1 \\ z_1 + z_2 = -1 \end{cases}$ **356.** $\begin{cases} z_1 + iz_2 = 1 \\ z_2 + iz_1 = 2 \end{cases}$ **357.** $\begin{cases} z_1 + \bar{z}_2 = 1 \\ \bar{z}_1 + z_2 = i \end{cases}$

Rozwiązać równania i nierówności. Zaznaczyć zbiór rozwiązań na płaszczyźnie zespolonej:

358. $\operatorname{Re} z + \operatorname{Re} z^2 \geq 0$ **359.** $3|z| \leq |z^2| + 1$ **360.** $|z| = |\bar{z} + 1|$

361. $|z+i| \leq |z-i|$ **362.** $\operatorname{Im} \frac{z}{z^2+1} = 0$ **363.** $\operatorname{Re} \frac{z+1}{z} = 0$

364. W trójkącie prostokątnym PQD kąt przy wierzchołku P jest prosty, a przy tym $PQ = 1$ i $PD = 4$. Ponadto punkt C jest środkiem odcinka PD , punkt A jest środkiem odcinka PC , punkt B jest środkiem odcinka AC . Punkt E leży na prostej PD , przy czym

$$\sphericalangle PQA + \sphericalangle PQB + \sphericalangle PQC = \sphericalangle PQD + \sphericalangle PQE.$$

Obliczyć PE .

365. Niech $z = \frac{3}{5} + \frac{4i}{5}$. Dla podanych liczb m, n podać taką liczbę całkowitą k , aby zachodziła równość $z^m \cdot \bar{z}^n = z^k$. Uwaga na sprzężenie w drugim czynniku po lewej stronie.

- a) $m = 10, \quad n = 1, \quad k = \dots\dots\dots$; b) $m = 15, \quad n = 2, \quad k = \dots\dots\dots$;
c) $m = 20, \quad n = 3, \quad k = \dots\dots\dots$; d) $m = 50, \quad n = 4, \quad k = \dots\dots\dots$.

366. Dla podanej liczby zespolonej z podać najmniejszą liczbę naturalną $n > 1$ taką, że $z^n = z$.

- a) $z = i$, $n = \dots$; b) $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $n = \dots$;
 c) $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i$, $n = \dots$; d) $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$, $n = \dots$.

367. Rozwiązać równanie

$$z\bar{z} = z + \bar{z}$$

w liczbach zespolonych. Opisać, jaką figurą geometryczną na płaszczyźnie zespolonej jest zbiór rozwiązań.

368. Czy nierówność $|z+1| < |z-4|$ jest prawdziwa dla liczby zespolonej

- a) $z = \log_2 3 + i \cdot \log_3 7$; b) $z = \log_3 5 + i \cdot \log_4 9$;
 c) $z = \log_4 8 + i \cdot \log_5 12$; d) $z = \log_5 11 + i \cdot \log_6 14$?

369. Czy równość $\bar{z}^2 = z^{-2}$ (uwaga na sprzężenie po lewej stronie) jest prawdziwa dla liczby zespolonej

- a) $z = \sqrt{\log_6 2} + i \cdot \sqrt{\log_6 3}$; b) $z = \sqrt{\log_{12} 3} + i \cdot \sqrt{\log_{12} 4}$;
 c) $z = \sqrt{\log_{18} 4} + i \cdot \sqrt{\log_{18} 5}$; d) $z = \sqrt{\log_{30} 5} + i \cdot \sqrt{\log_{30} 6}$?

370. Czy podana liczba zespolona spełnia równanie $z^6 = -64$

- a) $z = 1 + i\sqrt{3}$; b) $z = -1 + i\sqrt{3}$;
 c) $z = \sqrt{3} + i$; d) $z = -\sqrt{3} + i$?

371. Czy równość $z^{13} = z$ jest prawdziwa dla liczby zespolonej

- a) $z = -i$; b) $z = \frac{\sqrt{3}-i}{2}$; c) $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$; d) $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$?

372. Czy równość $\bar{z}^{13} = z^{-13}$ (uwaga na sprzężenie po lewej stronie) jest prawdziwa dla liczby zespolonej

- a) $z = \frac{3+4i}{5}$; b) $z = \frac{5+8i}{9}$;
 c) $z = \frac{5+i\sqrt{23}}{8}$; d) $z = \frac{6+i\sqrt{13}}{7}$?

373. Niech $R(m,n)$ będzie liczbą takich liczb zespolonych z , że

$$(z^m - 1) \cdot (z^n - 1) = 0.$$

Czy wtedy

- a) $R(2,3) = 5$; b) $R(3,4) = 6$; c) $R(4,6) = 8$; d) $R(3,6) = 8$?

374. Czy dla podanych liczb zespolonych z_1, z_2, z_3 istnieje taka liczba zespolona z , że

$$|z - z_1| = |z - z_2| = |z - z_3|$$

- a) $z_1 = 1 + i, \quad z_2 = 2 + 2i, \quad z_3 = 13 + 4i;$
 b) $z_1 = 1 + i, \quad z_2 = 2 + 2i, \quad z_3 = 8 + 8i;$
 c) $z_1 = 1 + i, \quad z_2 = 2 + 2i, \quad z_3 = 5 + 9i;$
 d) $z_1 = 1 + i, \quad z_2 = 2 + 2i, \quad z_3 = 7 + 11i?$

375. Czy podana liczba zespolona z spełnia nierówność $|z - 1| \leq |z - 3|$

- a) $z = \log_2 3 + i \cdot \log_2 7$ b) $z = \log_2 7 + i \cdot \log_2 5$
 c) $z = \log_2 3 + i \cdot \log_2 11$ d) $z = \log_2 5 + i \cdot \log_2 13$

376. Czy podana liczba zespolona z spełnia nierówność $|z - i| \leq |z - 5i|$

- a) $z = \log_2 3 + i \cdot \log_2 7$ b) $z = \log_2 7 + i \cdot \log_2 5$
 c) $z = \log_2 3 + i \cdot \log_2 11$ d) $z = \log_2 5 + i \cdot \log_2 13$

377. Czy podana liczba zespolona z spełnia równanie $\bar{z} = z^{-1}$

- a) $z = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$... b) $z = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i$... c) $z = 2 + 3i$... d) $z = 3 + 4i$...

378. Czy podana liczba zespolona z spełnia równanie $z^6 = 1$

- a) $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$... b) $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$... c) $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$... d) $z = i$...

379. Czy podana liczba zespolona z spełnia równanie $z^8 = 1$

- a) $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$... b) $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$... c) $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$... d) $z = i$...

380. Czy nierówność $|z - 1| < |z - 5|$ jest prawdziwa dla

- a) $z = 1 + i$ b) $z = 2 + 2i$ c) $z = 3 + 3i$ d) $z = 4 + 4i$

381. Czy nierówność $|z| < |z - 4i|$ jest prawdziwa dla

- a) $z = 1 + i$ b) $z = 2 + 2i$ c) $z = 3 + 3i$ d) $z = 4 + 4i$

382. Czy nierówność $|z - 5 - 5i| < |z + 1 + i|$ jest prawdziwa dla

- a) $z = 1 + i$ b) $z = 2 + 2i$ c) $z = 3 + 3i$ d) $z = 4 + 4i$

383. Czy nierówność $|z - 7| < |z - 7i|$ jest prawdziwa dla

- a) $z = 1 + i$ b) $z = 2 + 2i$ c) $z = 3 + 3i$ d) $z = 4 + 4i$

384. Czy liczba $(\sqrt{3}+i)^n$ jest rzeczywista dla

- a) $n = 2012$ b) $n = 2013$ c) $n = 2014$ d) $n = 2016$

385. Czy liczba $(1-\sqrt{3}\cdot i)^n$ jest rzeczywista dla

- a) $n = 2012$ b) $n = 2013$ c) $n = 2014$ d) $n = 2016$

386. Czy liczba $(-1+i)^n$ jest rzeczywista dla

- a) $n = 2012$ b) $n = 2013$ c) $n = 2014$ d) $n = 2016$

387. Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int_0^{2\pi} \cos^6 x \, dx$.

Uprościć wyrażenia (w uproszczonej formie nie może występować więcej niż jeden symbol $\arctg$):

388. $\arctg 3 + \arctg 7$

389. $\arctg 2 + \arctg 8$

390. $\arctg 5 + \arctg 8$

Zadania do omówienia na ćwiczeniach we wtorek 14.05.2019 (8:15-9:00 sala HS).

858. Rozwiązać równanie $z^5 = 1$ bez użycia funkcji trygonometrycznych.

Wskazówka: $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = (z^2 + az + 1)(z^2 + bz + 1)$

Wyjaśnić, czemu wskazówka zadziałała.

Na podstawie uzyskanego rozwiązania równania podać wartości sinusa i cosinusa dla odpowiednich (ciekawych) kątów.

859. Znaleźć taką funkcję dwukrotnie różniczkowalną $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że

$$f''(x) = \cos^4 x \quad \text{dla każdego } x \in \mathbb{R},$$

a ponadto $f(0) = f(\pi) = 0$. Obliczyć $f(2\pi)$.

860. Wyznaczyć taką liczbę wymierną $a < 5$, że $\int_a^5 \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{4}$.

861. Użyć liczb zespolonych do rozłożenia wielomianu $x^4 + 4$ na iloczyn dwóch wielomianów kwadratowych o współczynnikach całkowitych.

862. Użyć liczb zespolonych do rozłożenia wielomianu $x^4 + x^2 + 1$ na iloczyn dwóch wielomianów kwadratowych o współczynnikach całkowitych.