

859. Znaleźć taką funkcję dwukrotnie różniczkowalną $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że

$$f''(x) = \cos^4 x \quad \text{dla każdego } x \in \mathbb{R},$$

a ponadto $f(0) = f(\pi) = 0$. Obliczyć $f(2\pi)$.

Rozwiązanie:

Korzystając z liczb zespolonych wyprowadzimy odpowiednią tożsamość trygonometryczną.

Przyjmijmy $z = \cos x + i \sin x$. Wówczas

$$z^n = \cos nx + i \sin nx, \quad z^{-n} = \cos nx - i \sin nx, \quad \cos nx = \frac{z^n + z^{-n}}{2}.$$

Zatem

$$\cos^4 x = \left(\frac{z + z^{-1}}{2} \right)^4 = \frac{z^4 + 4z^2 + 6 + 4z^{-2} + z^{-4}}{16} = \frac{\cos 4x}{8} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{3}{8}.$$

W konsekwencji

$$f'(x) = \int \frac{\cos 4x}{8} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{3}{8} dx = \frac{\sin 4x}{32} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{3x}{8} + C$$

oraz

$$f(x) = \int \frac{\sin 4x}{32} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{3x}{8} + C dx = -\frac{\cos 4x}{128} - \frac{\cos 2x}{8} + \frac{3x^2}{16} + Cx + D.$$

Z warunku $f(0) = 0$ otrzymujemy

$$-\frac{1}{128} - \frac{1}{8} + D = 0,$$

skąd $D = 17/128$. Natomiast z warunku $f(\pi) = 0$ otrzymujemy

$$-\frac{1}{128} - \frac{1}{8} + \frac{3\pi^2}{16} + C\pi + \frac{17}{128} = 0,$$

co daje $C = -3\pi/16$.

Szukana funkcja jest więc dana wzorem

$$f(x) = -\frac{\cos 4x}{128} - \frac{\cos 2x}{8} + \frac{3x^2}{16} - \frac{3\pi x}{16} + \frac{17}{128},$$

a przy tym

$$f(2\pi) = -\frac{\cos 8\pi}{128} - \frac{\cos 4\pi}{8} + \frac{3(2\pi)^2}{16} - \frac{3\pi(2\pi)}{16} + \frac{17}{128} = \frac{3\pi^2}{8}.$$

860. Wyznaczyć taką liczbę wymierną $a < 5$, że $\int_a^5 \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{4}$.

Rozwiązanie:

Ponieważ

$$\int_a^5 \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x \Big|_{x=a}^5 = \operatorname{arctg} 5 - \operatorname{arctg} a,$$

pozostaje znaleźć liczbę a spełniającą równanie

$$\operatorname{arctg} 5 - \operatorname{arctg} a = \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1,$$

czyli

$$\operatorname{arctg} a = \operatorname{arctg} 5 - \operatorname{arctg} 1.$$

Ponieważ $\operatorname{arctg} t$ jest argumentem liczby zespolonej $1+ti$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} a &= \operatorname{arctg} 5 - \operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg} 5 + \operatorname{arctg}(-1) = \arg(1+5i) + \arg(1-i) = \\ &= \arg((1+5i) \cdot (1-i)) + 2k\pi = \arg(6+4i) + 2k\pi = \arg\left(1 + \frac{2}{3}i\right) + 2k\pi = \operatorname{arctg} \frac{2}{3} + 2k\pi, \end{aligned}$$

skąd po uwzględnieniu nierówności

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} \frac{2}{3} < \frac{\pi}{2}$$

i

$$0 < \operatorname{arctg} 5 - \operatorname{arctg} 1 < \frac{\pi}{2}$$

wynika $k=0$ oraz $a=2/3$.

Odpowiedź: Warunki zadania spełnia liczba $a=2/3$.