

Kolokwium nr 10: czwartek 23.05.2019, godz. 12:15–13:00 (sala HS), materiał zad. 1–406.

Kolokwium LUX: wtorek 21.05.2019, godz. 8:15 (sala HS), materiał zad. 1–390, 801–862.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach we wtorek 21.05.2019.

Studenci piszący kolokwium LUX-owe mają zajęcia w sali HS (niezależnie od grupy):

kolokwium LUX-owe 8:15-10:00, omówienie zadań z listy 10:15-12:00.

Pozostali mają ćwiczenia w godz. 9:15-12:00:

grupa 1 w sali A lub EM (w/g indywidualnej decyzji), grupa 2 w sali EM, grupa 3 sali A.

Kryteria zbieżności szeregów o wyrazach zespolonych

Warunek konieczny zbieżności

Jeżeli z_n nie dąży do 0, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest rozbieżny.

Zbieżność bezwzględna

Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < \infty$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny.

Kryterium d'Alemberta i kryterium Cauchy'ego

Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| < 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny.

Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| > 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest rozbieżny, a co więcej $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = +\infty$.

Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|} < 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny.

Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|} > 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest rozbieżny, a co więcej $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = +\infty$.

Uogólnienie kryterium o szeregach naprzemiennych

Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżnym do zera nierosnącym ciągiem liczb rzeczywistych dodatnich, to dla dowolnej takiej liczby zespolonej z , że $|z| = 1$ oraz $z \neq 1$, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ jest zbieżny.

Powyższe jest prawdą także dla $|z| < 1$, ale wówczas na ogół stosujemy inne kryteria.

Inne kryteria

Jeżeli szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ są zbieżne, to szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} (z_n \pm y_n)$ są zbieżne i wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} (z_n \pm y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} y_n.$$

Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ jest rozbieżny, to szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} (z_n \pm y_n)$ są rozbieżne.

Dla dowolnej liczby zespolonej $c \neq 0$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} cz_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$. Jeśli oba szeregi są zbieżne, to

$$\sum_{n=1}^{\infty} cz_n = c \sum_{n=1}^{\infty} z_n.$$

Zbieżność szeregu nie zależy od zmiany lub pominięcia skończenie wielu początkowych wyrazów.

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżne są jednocześnie szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_n$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_n$. Jeśli podane szeregi są zbieżne, to

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_n + i \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_n.$$

Obszar zbieżności szeregu potęgowego jest kołem o środku w zerze i promieniu $R \in [0, +\infty]$, zwanym promieniem zbieżności szeregu. Przy $R = 0$ koło zbieżności degeneruje się do punktu 0, przy $R = +\infty$ obszarem zbieżności jest cała płaszczyzna zespolona.

Na okręgu będącym brzegiem koła zbieżności szereg potęgowy może być zbieżny w części punktów, a w części rozbieżny.

391. Ciąg (z_n) o wyrazach zespolonych dany jest wzorem:

$$z_n = \sqrt{n^2 + ni} - n.$$

Wyjaśnić, dlaczego powyższa definicja nie jest jednoznaczna i zaproponować możliwe sposoby jej doprecyzowania. Wybrać taki sposób jej doprecyzowania, aby podany ciąg był zbieżny i obliczyć jego granicę.

392. To samo dla ciągu zespolonego danego wzorem:

$$z_n = \sqrt{n^2 + 2ni} + n.$$

Zbadać zbieżność zespolonych szeregów liczbowych:

393. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + in + 1}$

394. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + i}$

395. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + i}$

396. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+i}{n^2 + i}$

397. Obliczyć sumę szeregu geometrycznego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^n}.$$

Naszkicować na płaszczyźnie zespolonej kilka jego początkowych sum częściowych.

Zapisać szeregi (o wyrazach rzeczywistych) części rzeczywistych i urojonych jego wyrazów. Podać sumy tych szeregów (z jednej strony uzyskać je z sumy danego szeregu zespolonego, a z drugiej strony wyliczyć bezpośrednio).

Wyznaczyć obszary zbieżności zespolonych szeregów potęgowych:

398. $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n$

399. $\sum_{n=1}^{\infty} n z^n$

400. $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^{n^2}$

401. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n z^n}{\sqrt{n}}$

402. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{6n}}{n}$

403. Obliczyć sumę zespolonego szeregu potęgowego (geometrycznego)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}.$$

Wykorzystać otrzymany wynik do obliczenia sum szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n} \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n}.$$

404. Uogólnić poprzednie zadanie i obliczyć sumy szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{p^n} \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{p^n}$$

dla dowolnej wartości rzeczywistej parametru $p > 1$.

405. Wyznaczyć promień zbieżności zespolonego szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^2} \cdot z^{n^2}}{(n!)^n}.$$

406. Wyznaczyć obszar zbieżności zespolonego szeregu potęgowego $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{3n}}{(-8)^n \cdot n}.$